

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



المملكة العربية السعودية

الرياضيات 3

التعليم الثانوي - نظام المسارات
السنة الثالثة

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

طبعة 2023-1445

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية Exponential and Logarithmic Relations and Functions

فيما سبق

درست تمثيل دوال كثيرات الحدود وتحويلاتها بيانياً.

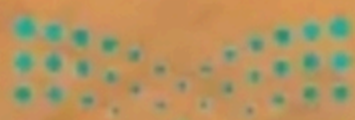
والآن

- التعرف الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أمثل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانياً.
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

لماذا؟

علوم: ترتبط العلوم والرياضيات ارتباطاً وثيقاً، ويظهر ذلك جلياً في الفيزياء والكيمياء والأحياء، وغيرها، وتحتاج هذه الفروع إلى مهارات رياضية عالية، وستتعلم في هذا الفصل جوانب رياضية ذات صلة قوية بعلوم الحاسوب، والفيروسات، والحشرات، ونمو البكتيريا، وانقسام الخلايا، وعلم الفلك، والأعاصير، والتهزات الأرضية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال، ثم تلبها بما ستتعلمه في هذا الفصل.



الفصل (2) العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

التهيئة للفصل الثاني:

اختبار سريع:

بسط كل مما يأتي مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$a^{4+3+5} = a^{12} \quad (1)$$

$$8x^3y^9z^9 \quad (2)$$

$$\frac{-3x^6}{2y^3z^5} \quad (3)$$

$$\frac{4r^4}{81n^4t^2} \quad (4)$$

$$\frac{7.5 \times 10^3}{1.5 \times 10^3} = 5 \text{ g/cm}^3 \quad (5) \text{ كثافة:}$$

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = 2x + 5 \quad (6)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

$$f(x) = x - 3 \quad (7)$$

$$f^{-1}(x) = x + 3$$

$$f(x) = -4x \quad (8)$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x - 3 \quad (9)$$

$$f^{-1}(x) = 3x + 12$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2} \quad (10)$$

$$f^{-1}(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 4 \quad (11)$$

$$f^{-1}(x) = 3x - 12$$

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى أم لا. وضح:

(12) نعم،

$$\text{لأن: } [f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$$

(13) لا،

$$\text{لأن: } [f \circ g](x) = 4x - 5 \text{ بينما } [g \circ f](x) = x$$

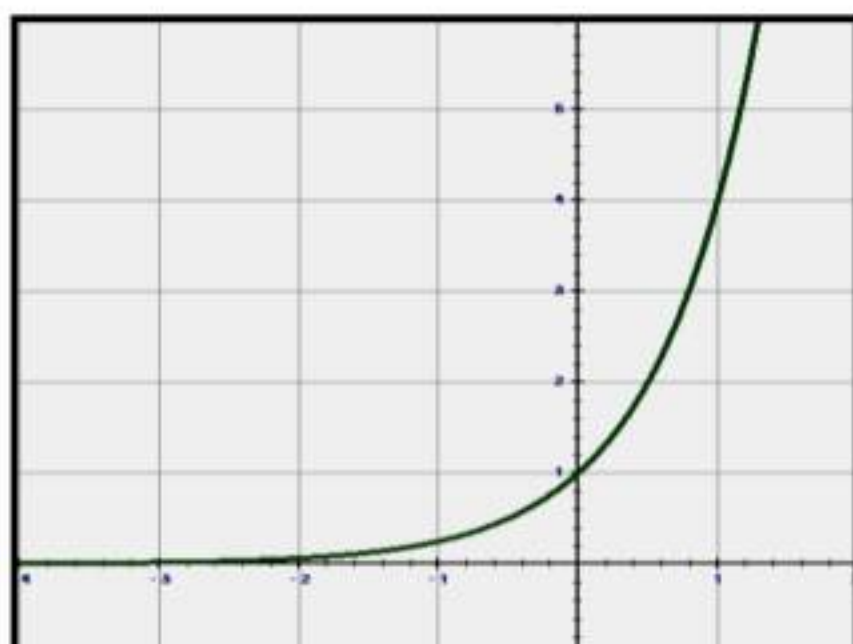
(14) طعام:

$f^{-1}(x) = 2x - 8$ وهي تعطي عدد الإضافات التي يحصل عليها شخص دفع x ريالاً.

(2-1) تمثيل الدوال الأسية بيانياً

■ تحقق من فهمك:

(1A) مثل الدالة $y = 4^x$ بيانياً، وحدد مجالها ومداها.



x	7^x	y
-2	7^{-2}	0.02
-1	7^{-1}	0.14
0	7^0	1
1	7^1	7
2	7^2	49

التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عند $y = 1$

المجال: R

المدي: $\{y \mid y > 0\}$

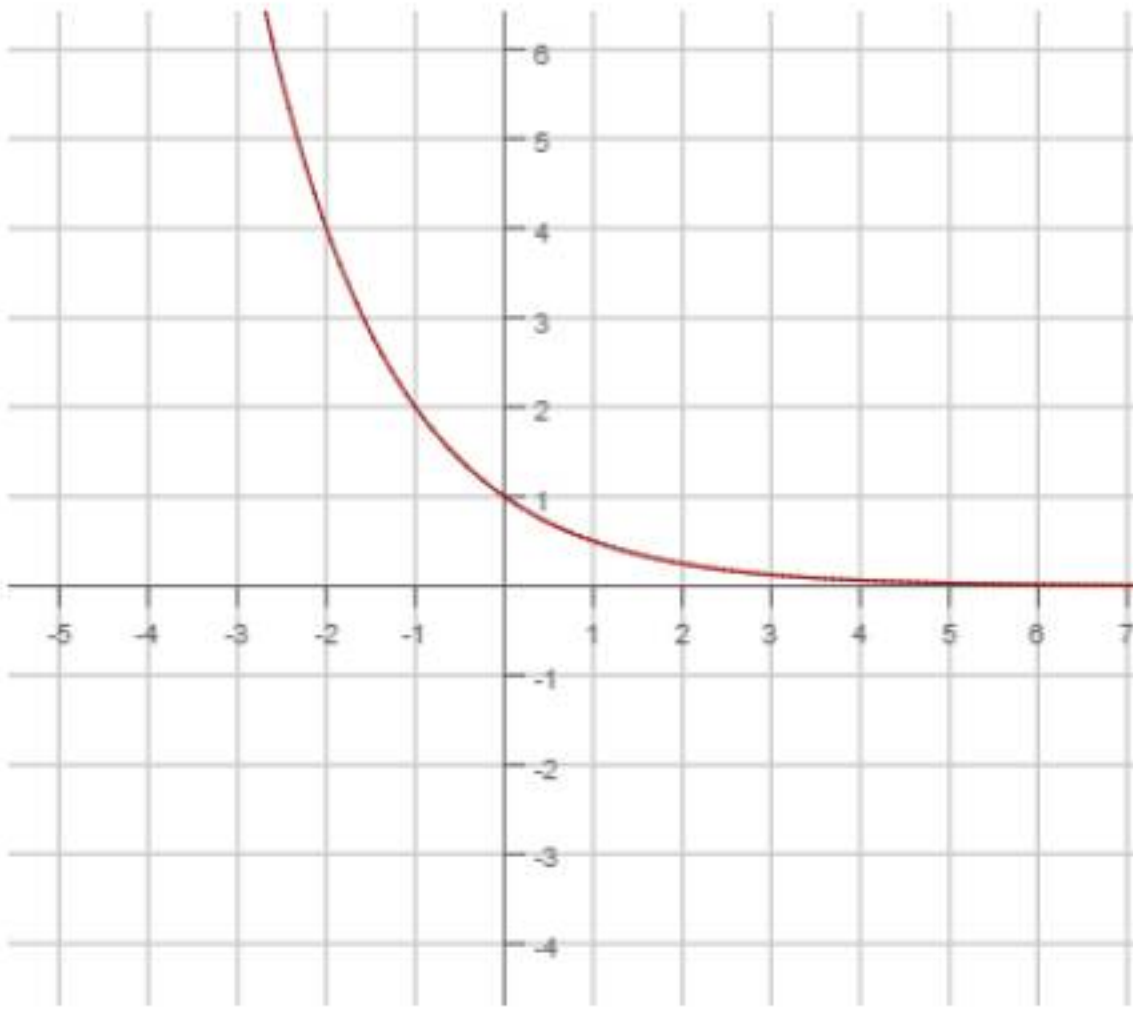
(1B) 2.6

■ تحقق من فهمك:

(2)

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (A)$$

x	y
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25



التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عند $y = 1$

المجال: $(-\infty, \infty), \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

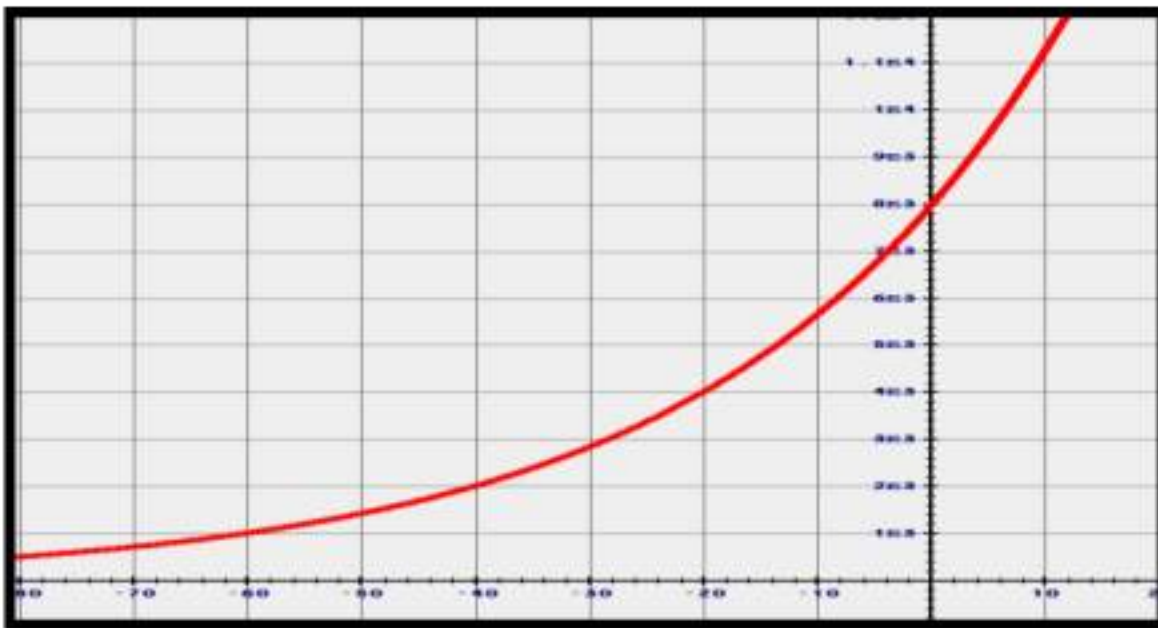
المدى: $(0, \infty), \{y \mid y > 0\}$

5.7 (2B)

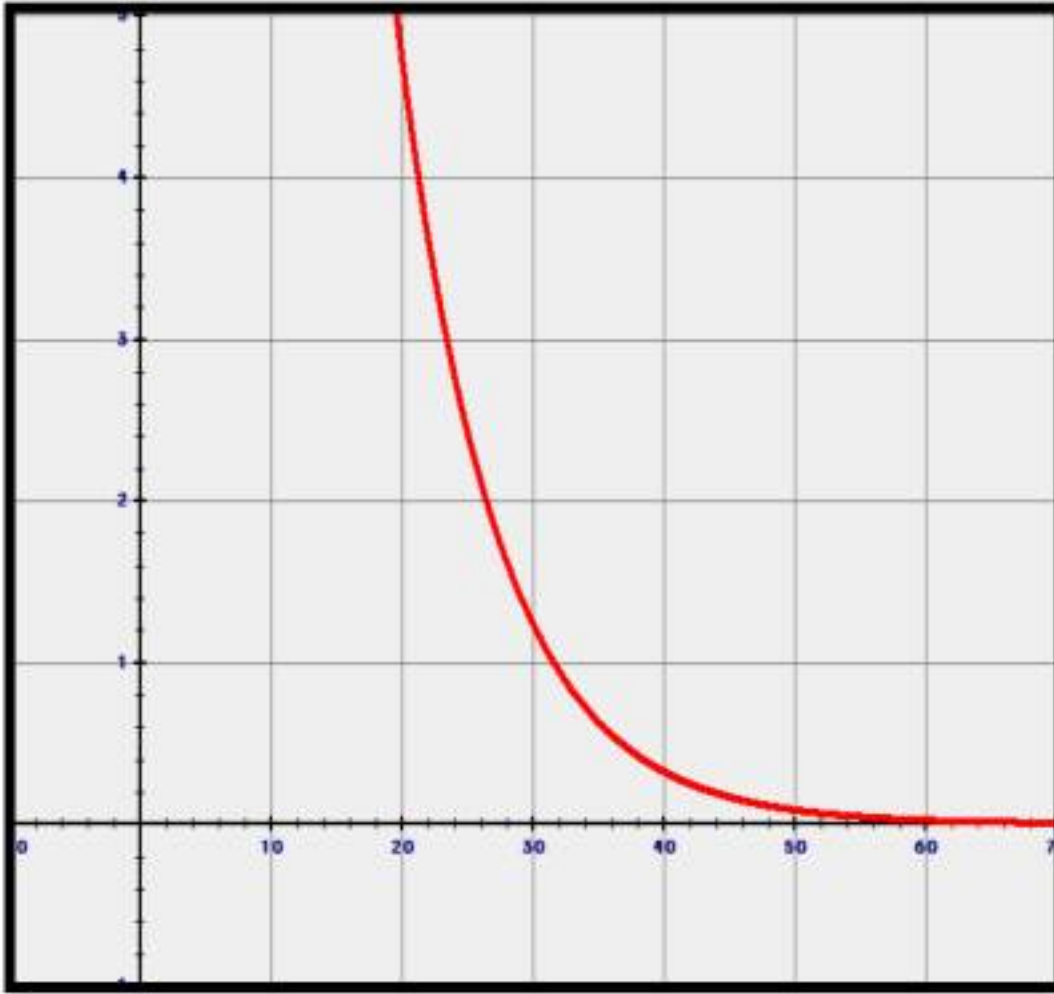
■ تحقق من فهمك:

(3) ثقافة مالية:

$$y = 80000(1.085)^t$$



■ تحقق من فهمك:
(4)



المعادلة الأسية التي تمثل كمية الكافيين المتبقية

$$y = a(1-r)^t$$

$$= 68(1-0.125)^t$$

$$= 68(0.875)^t$$

كمية الكافيين بعد ساعتين:

$$= 68(0.875)^2 \approx 52.06 \text{ mg}$$

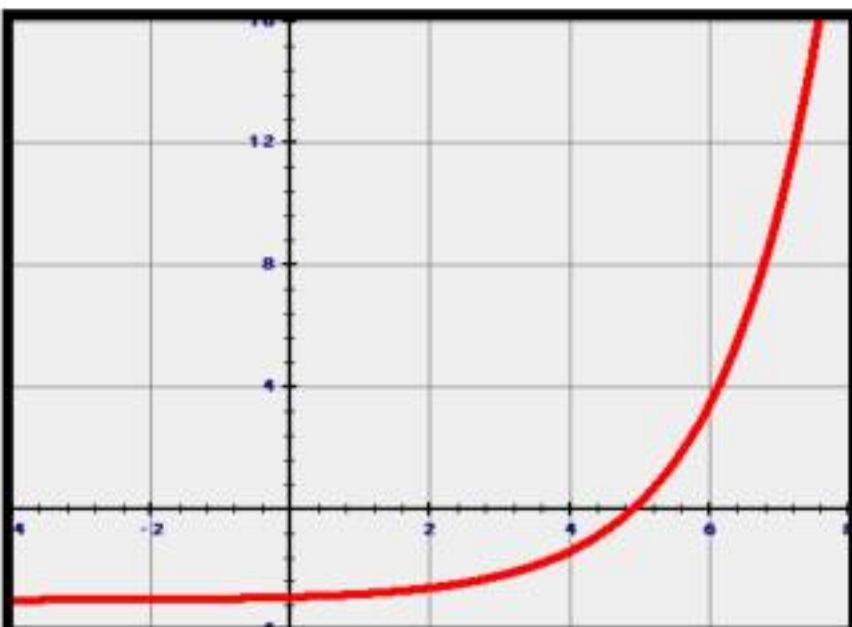
■ تحقق من فهمك:

$$y = 2^{x+3} - 5 \quad (5A)$$

التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$ بإزاحة 3 وحدات لليسار و 5 وحدات لأسفل.

← المجال: R ← المدى: $\{y \mid y > -5\}$

$$y = 0.1(6)^x - 3 \quad (5B)$$

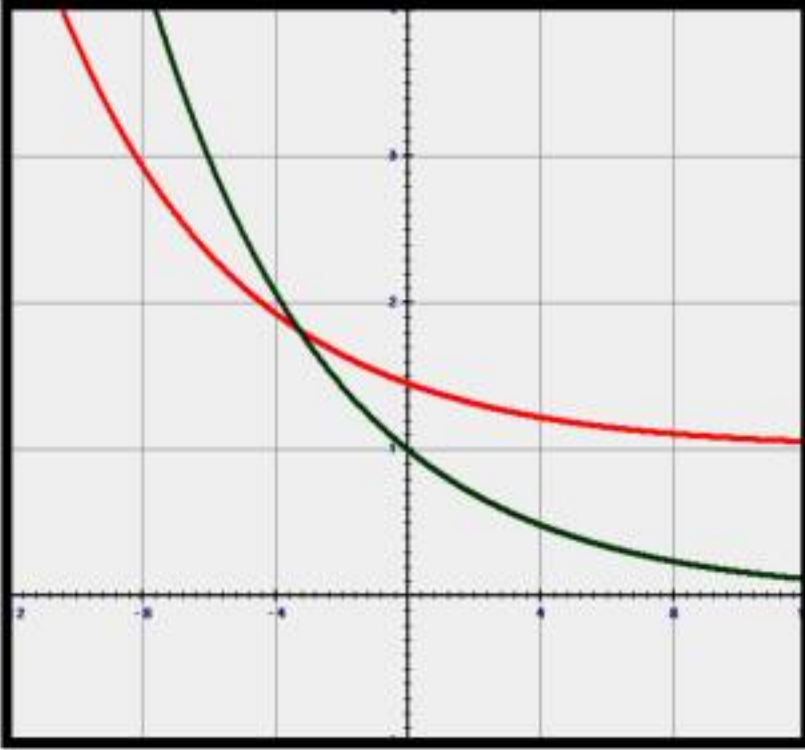


التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 6^x$ بتضييق رأسي معامل 0.1 وإزاحة 3 لأسفل.

← المجال: R ← المدى: $\{y \mid y > -3\}$

■ تحقق من فهمك:

$$y = \frac{3}{8} \left(\frac{5}{6} \right)^{x-1} + 1 \quad (6)$$



التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{5}{6} \right)^x$ بتضيق رأسي معامل $\frac{3}{8}$ وإزاحة وحدة واحدة لليمين ووحدة واحدة إلى الأعلى.

← المجال: R ← المدى: $\{y \mid y > 1\}$

تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدّد مجالها، ومداهـا:

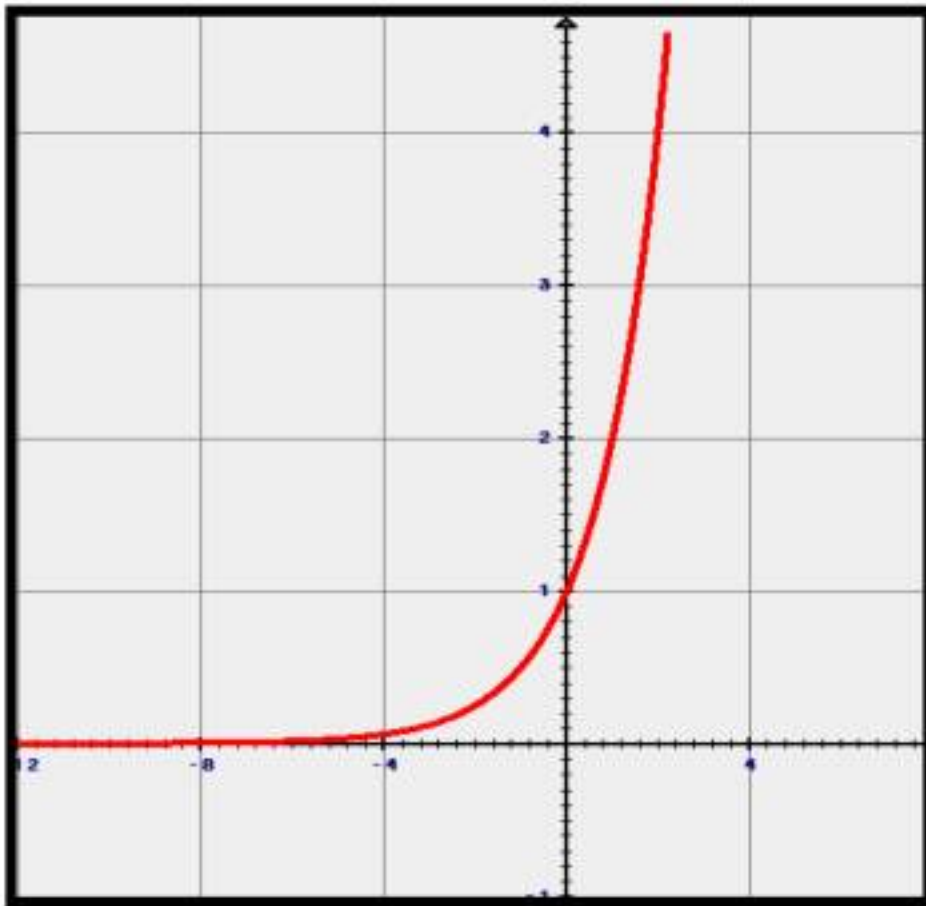
(1)

$$f(x) = 2^x$$

المجال: R

المدى: $\{y \mid y > 0\}$

$$2.8 = 2^{1.5}$$

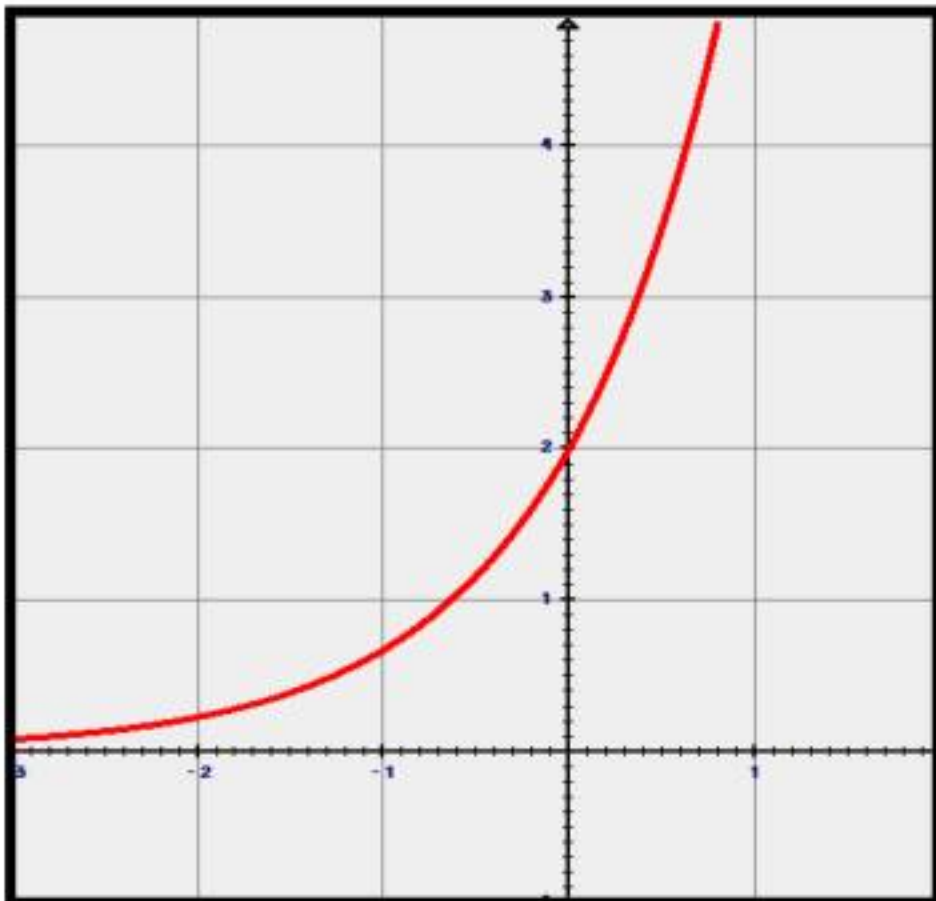


$$f(x) = 2(3)^x \quad (2)$$

المجال: R

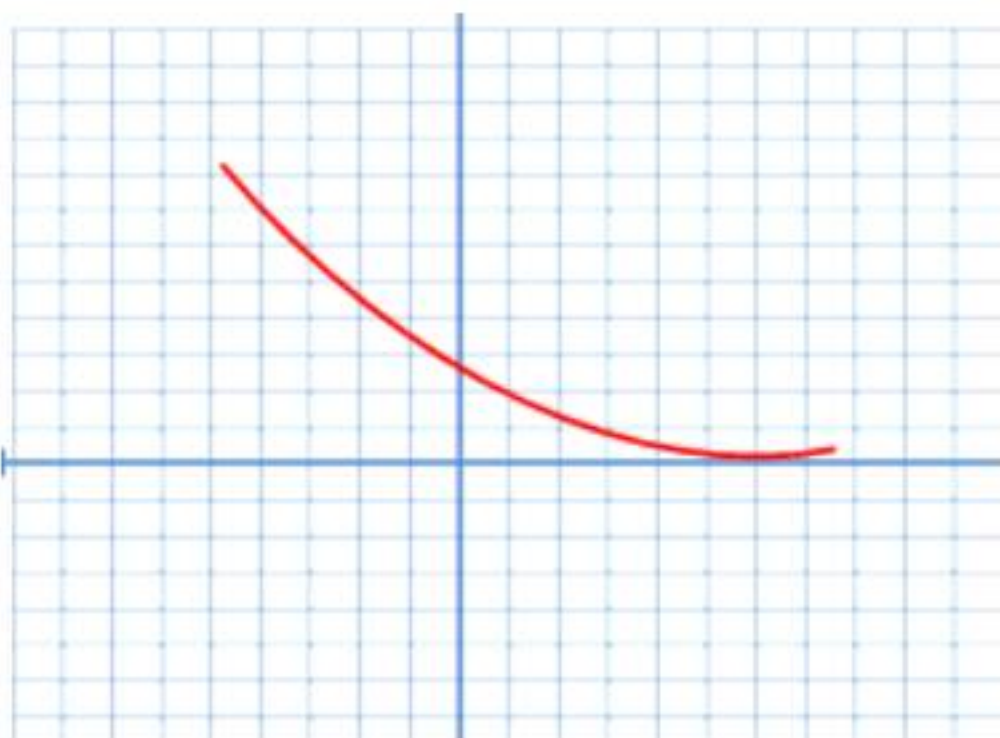
المدى: $\{y \mid y > 0\}$

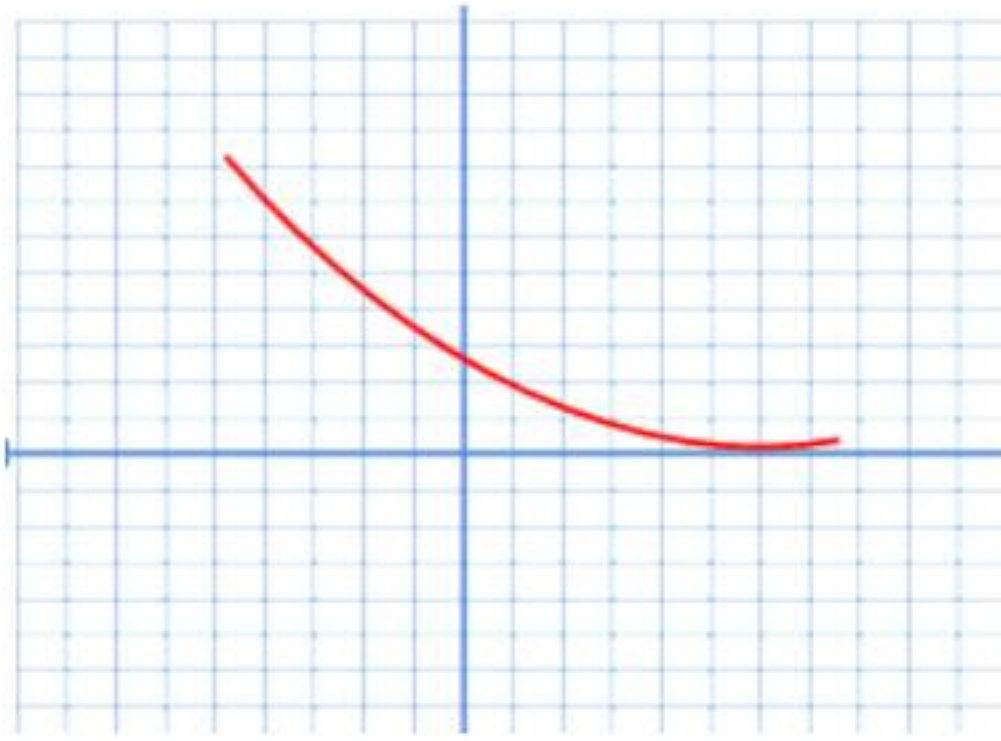
$$0.7 = 2(8)^{-\frac{1}{2}}$$



$$f(x) = 2\left(\frac{1}{6}\right)^x \quad (3)$$

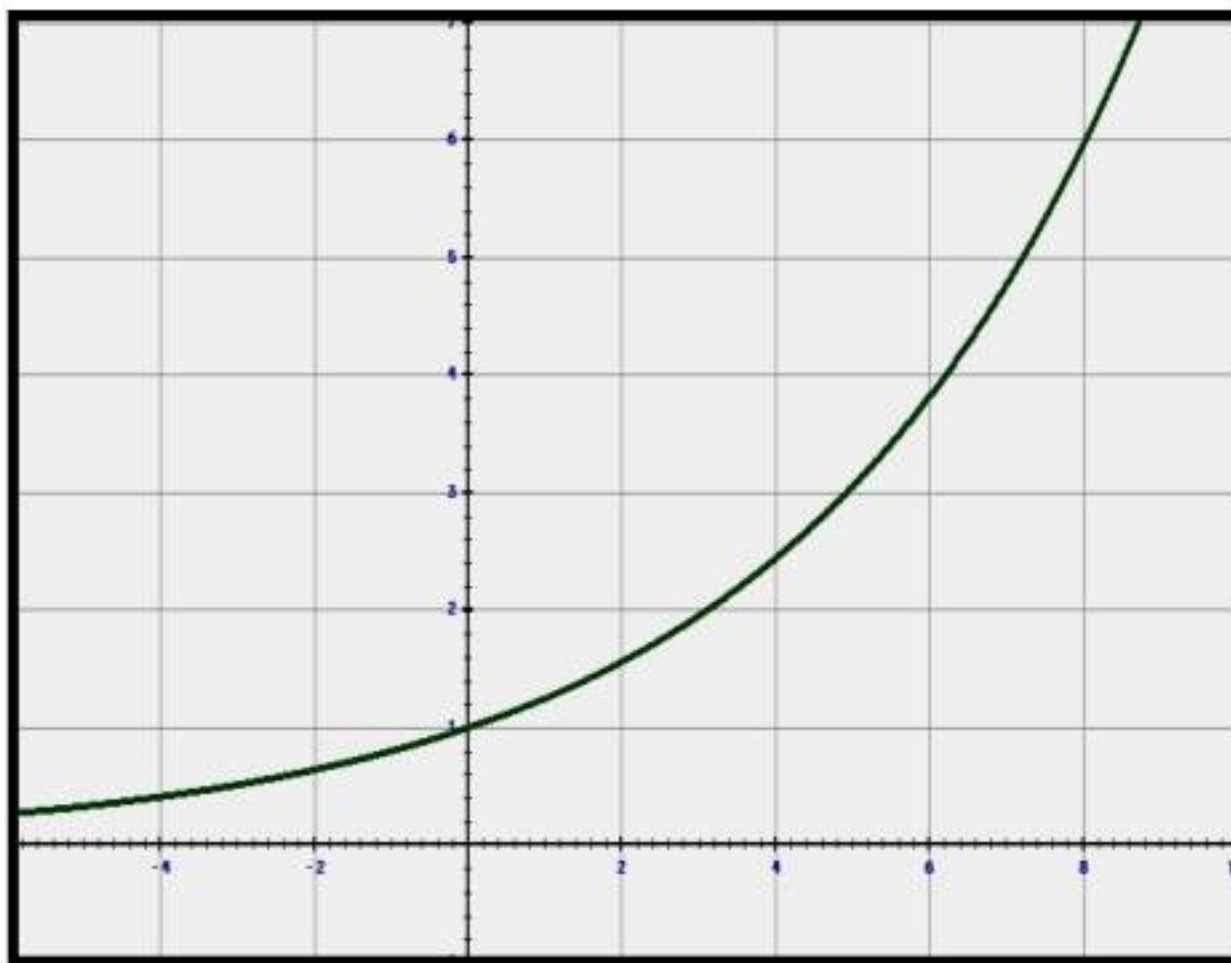
$$0.1 = 2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}$$





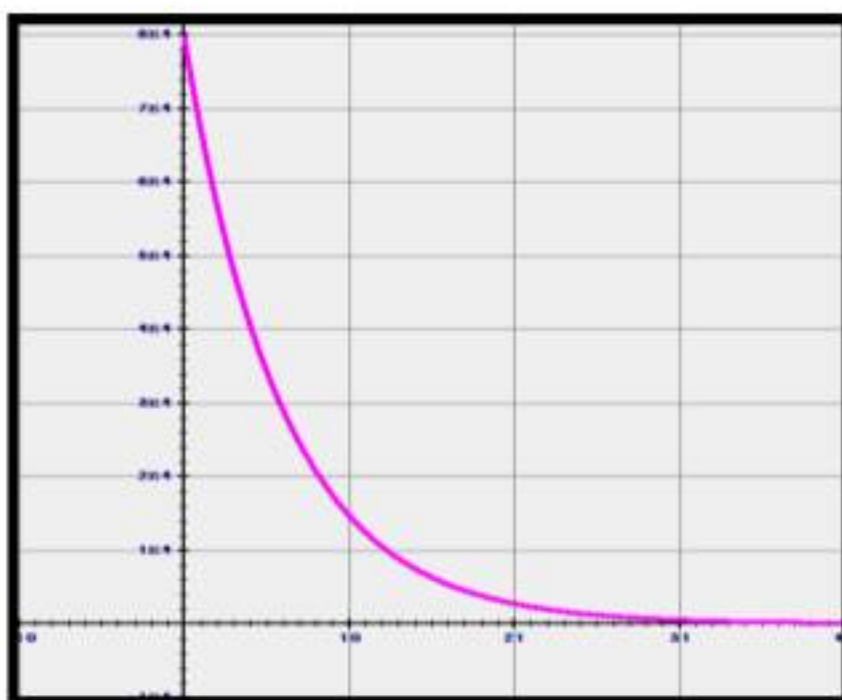
$$f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x \quad (4)$$

$$1.5 = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{.5}$$



(5) حاسوب:

المعادلة: $y = (1.25)^x$

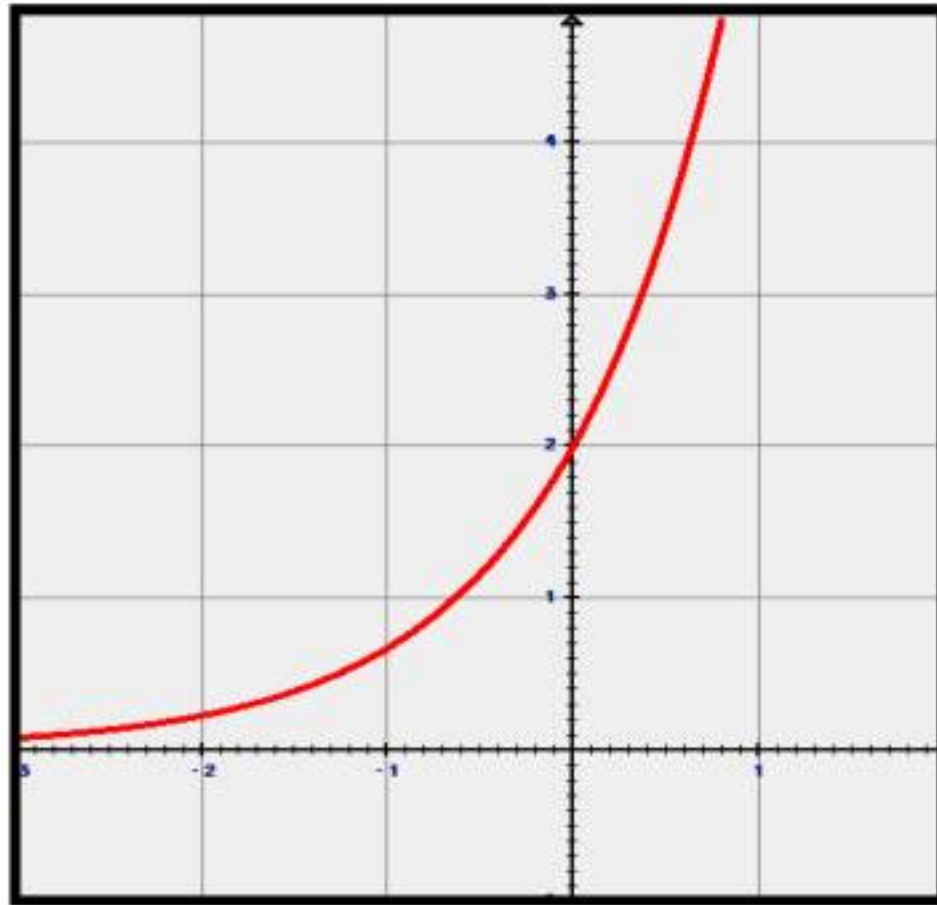


(6) سيارات:

المعادلة $y = 80000(0.85)^x$

بعد 20 سنة يكون ثمنها 3100 ريال تقريبا

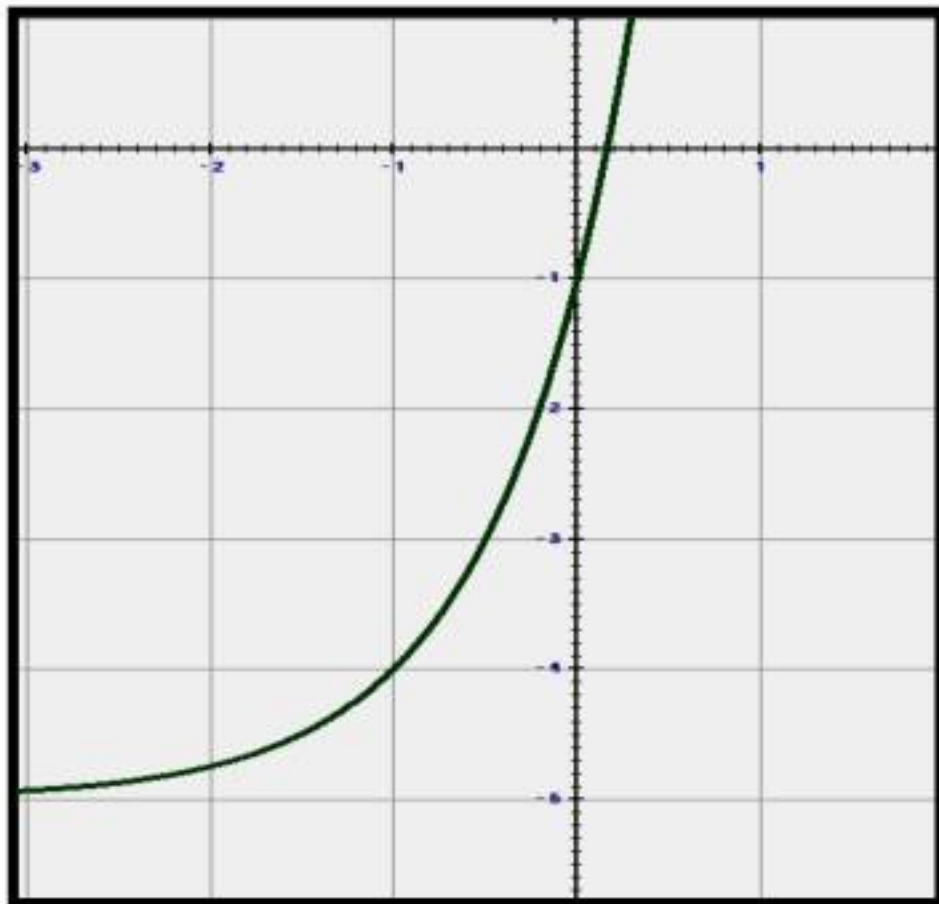
مثل كل دالة مما يأتي بيانياً وحدد مجالها ومداه:



$$f(x) = 2(3)^x \quad (7)$$

المجال: R

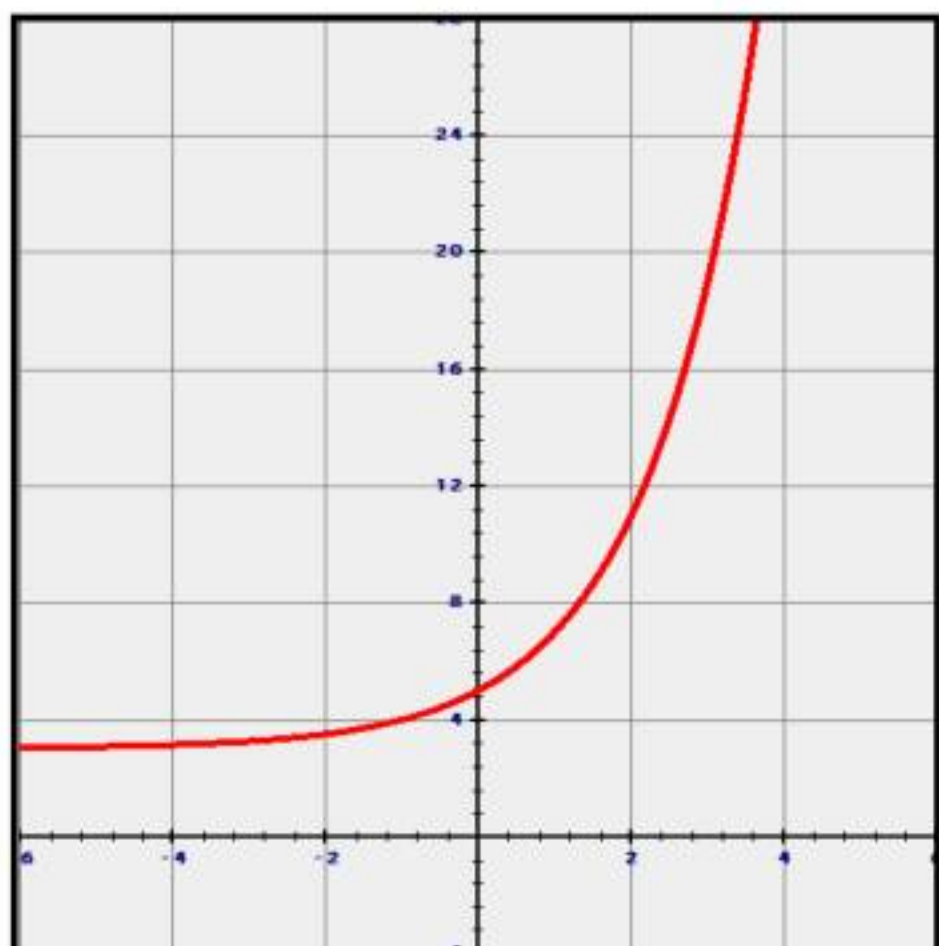
المدى: $\{y \mid y > 0\}$



$$f(x) = 4^{x+1} - 5 \quad (8)$$

المجال: R

المدى: $\{y \mid y > -5\}$

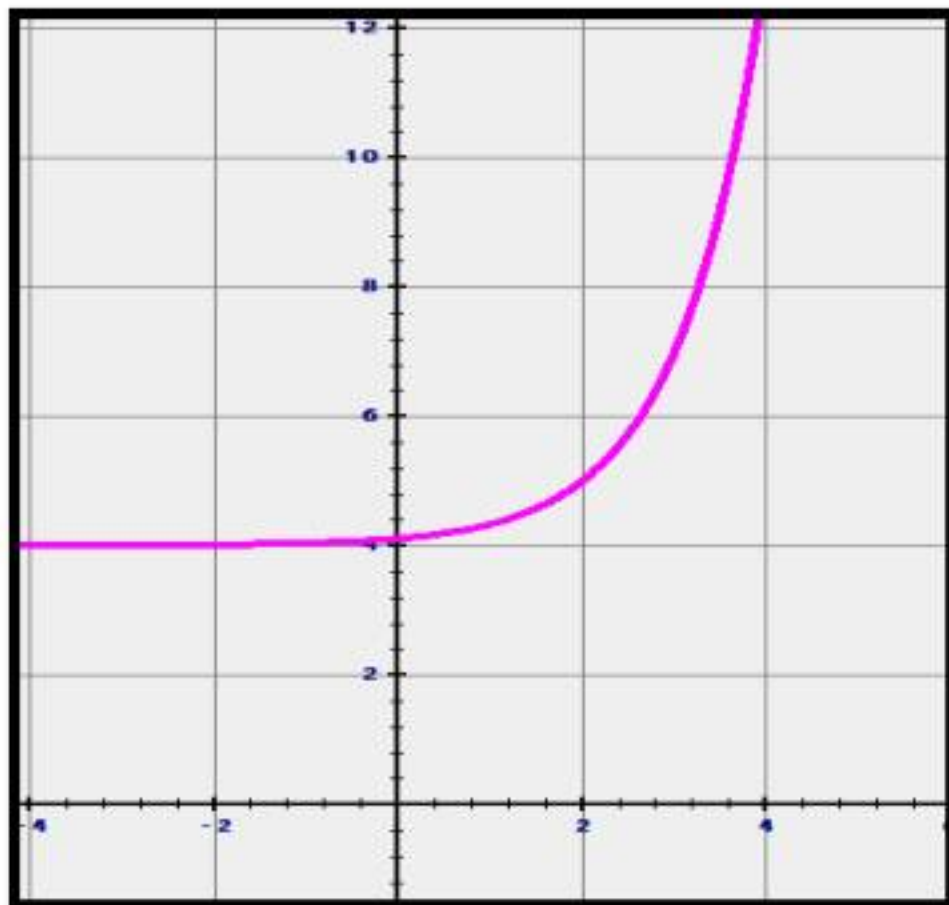


(9)

$$f(x) = 2^{x+1} + 3$$

المجال: R

المدى: $\{y \mid y > 3\}$

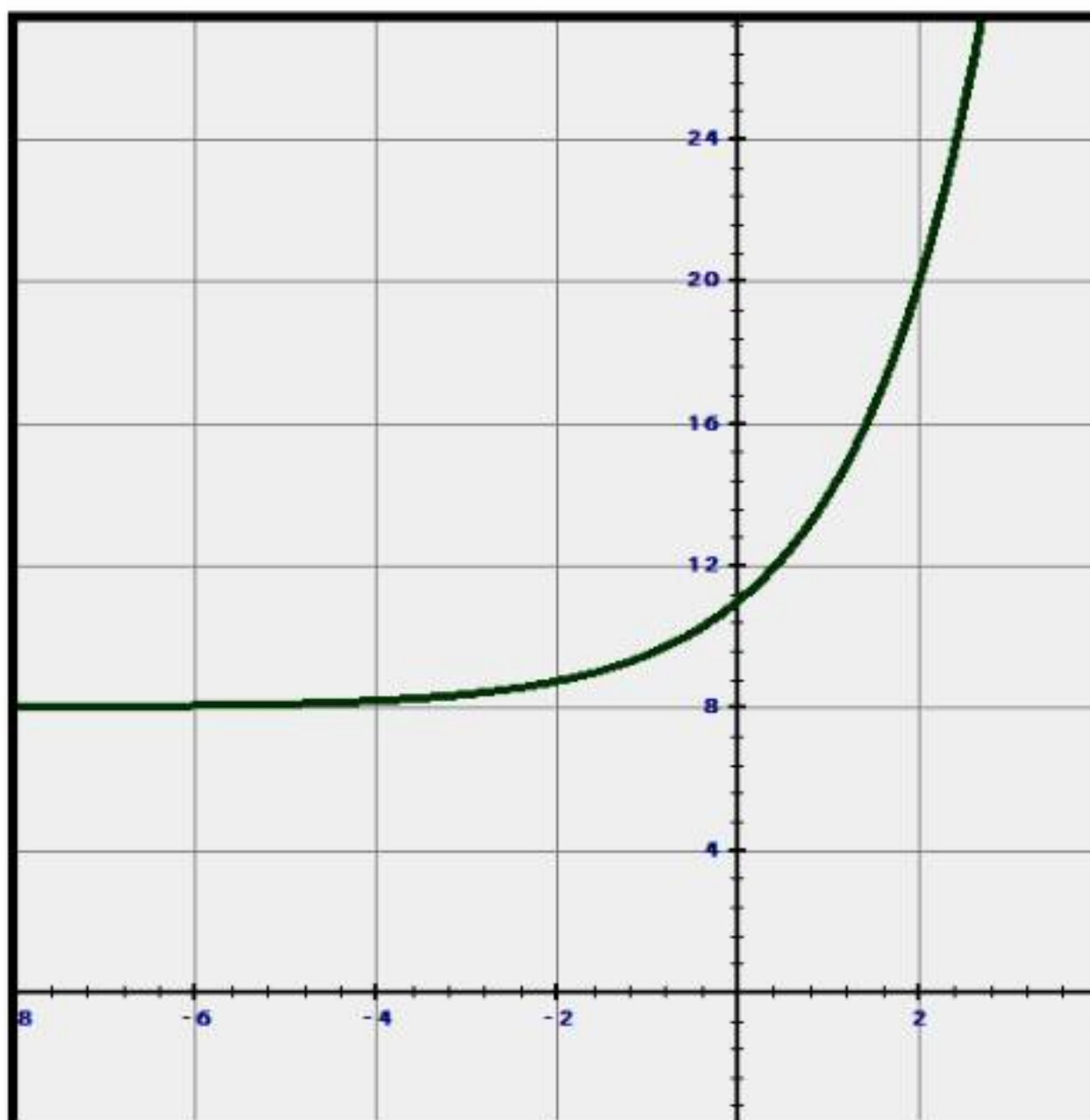


(10)

$$f(x) = 3^{x-2} + 4$$

المجال: R

المدى: $\{y \mid y > 4\}$



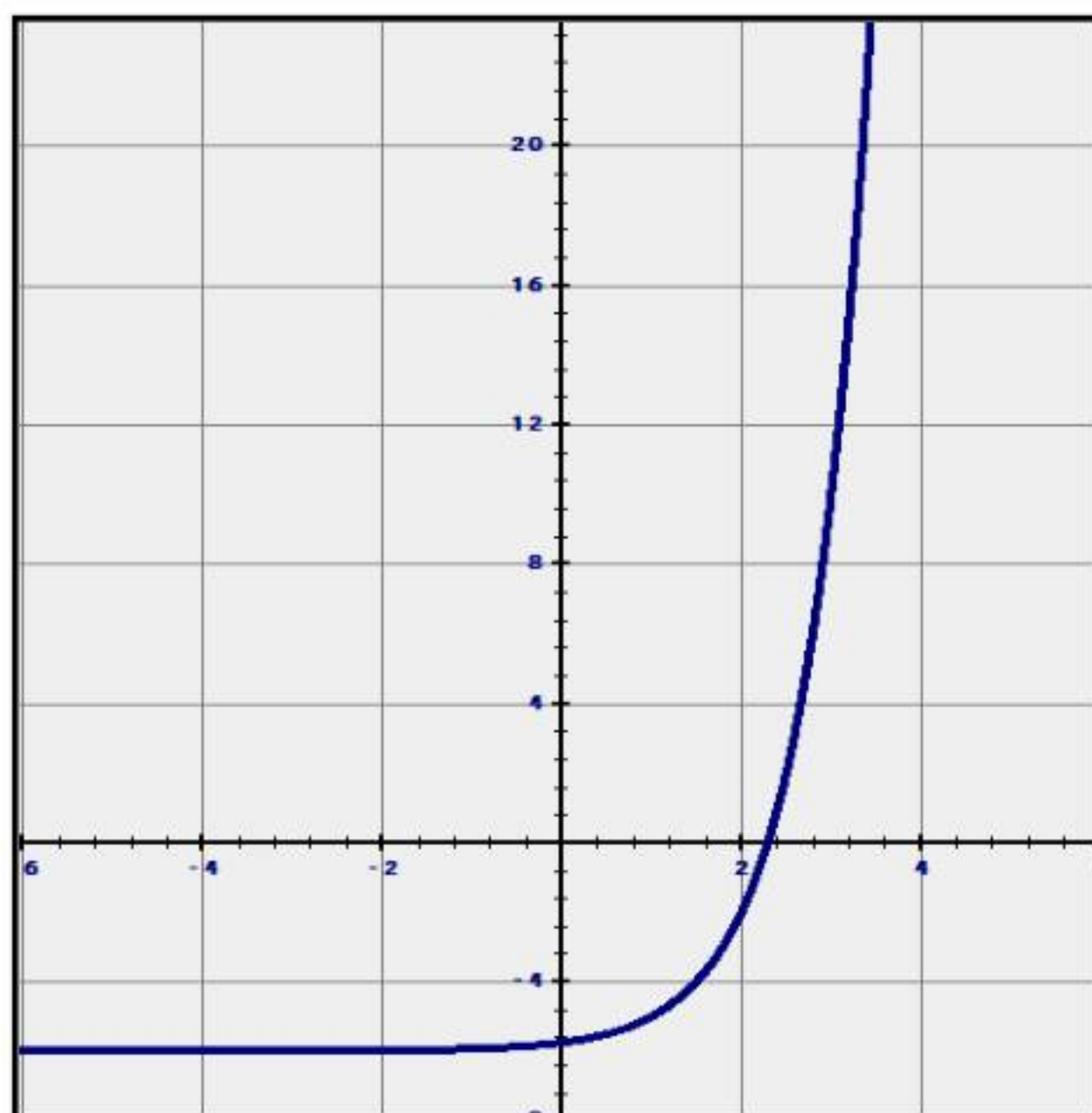
(11)

$$f(x) = 3(2)^x + 8$$

المجال: R

المدى: $\{y \mid y > 8\}$

$$f(x) = 0.25(4)^x - 6 \quad (12)$$



المجال: R

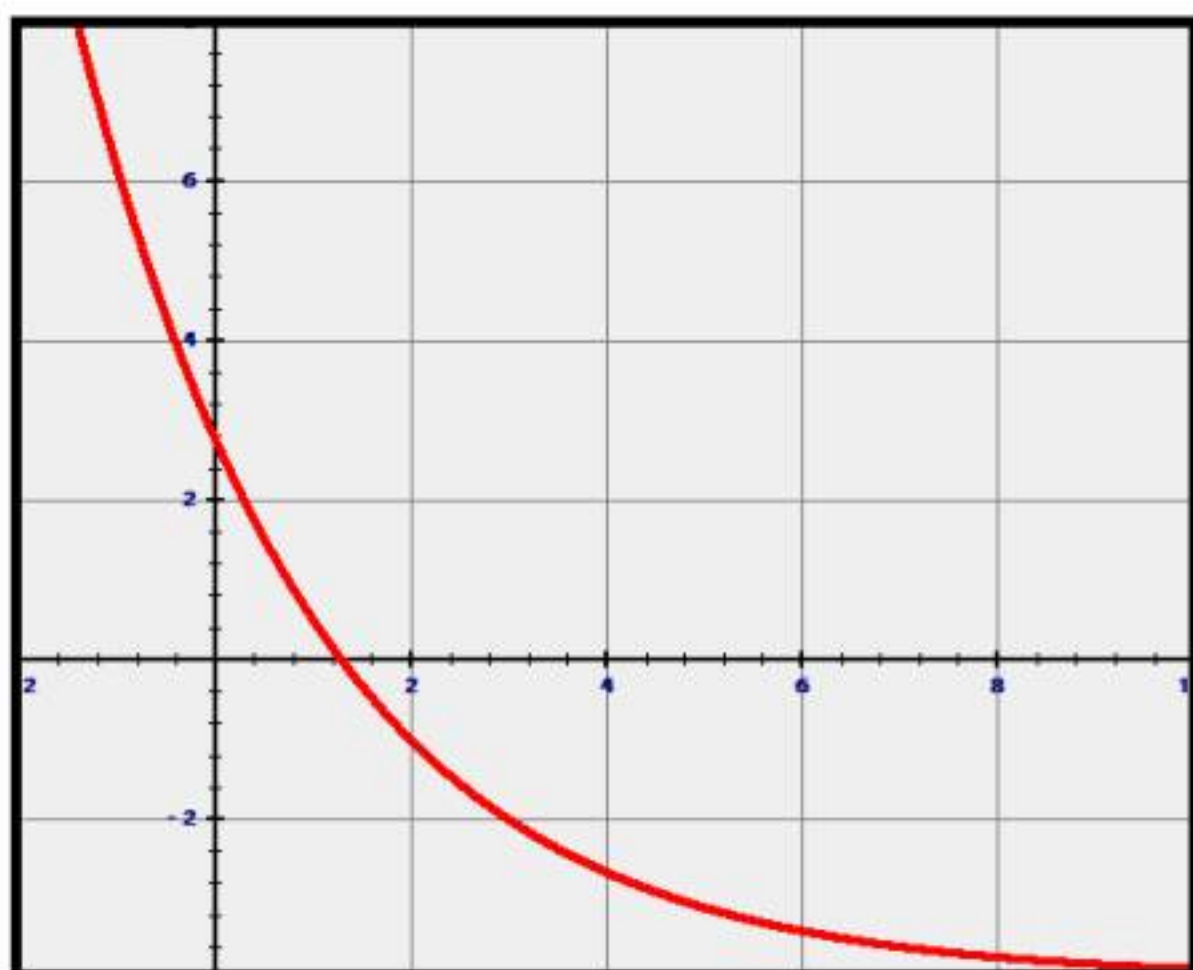
المدى: $\{y \mid y > -6\}$

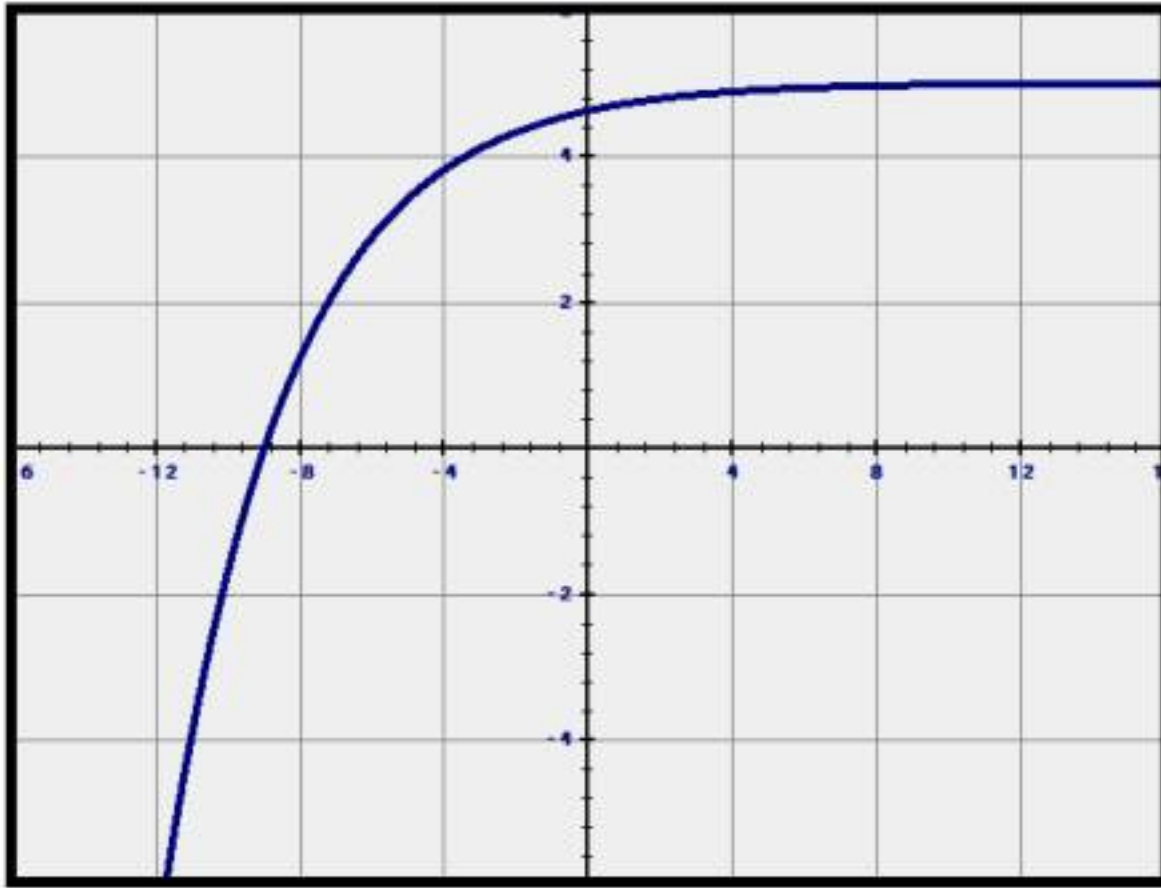
مثل كل دالة مما يأتي بيانياً وحدد مجالها ومداه:

(13)

المجال: R

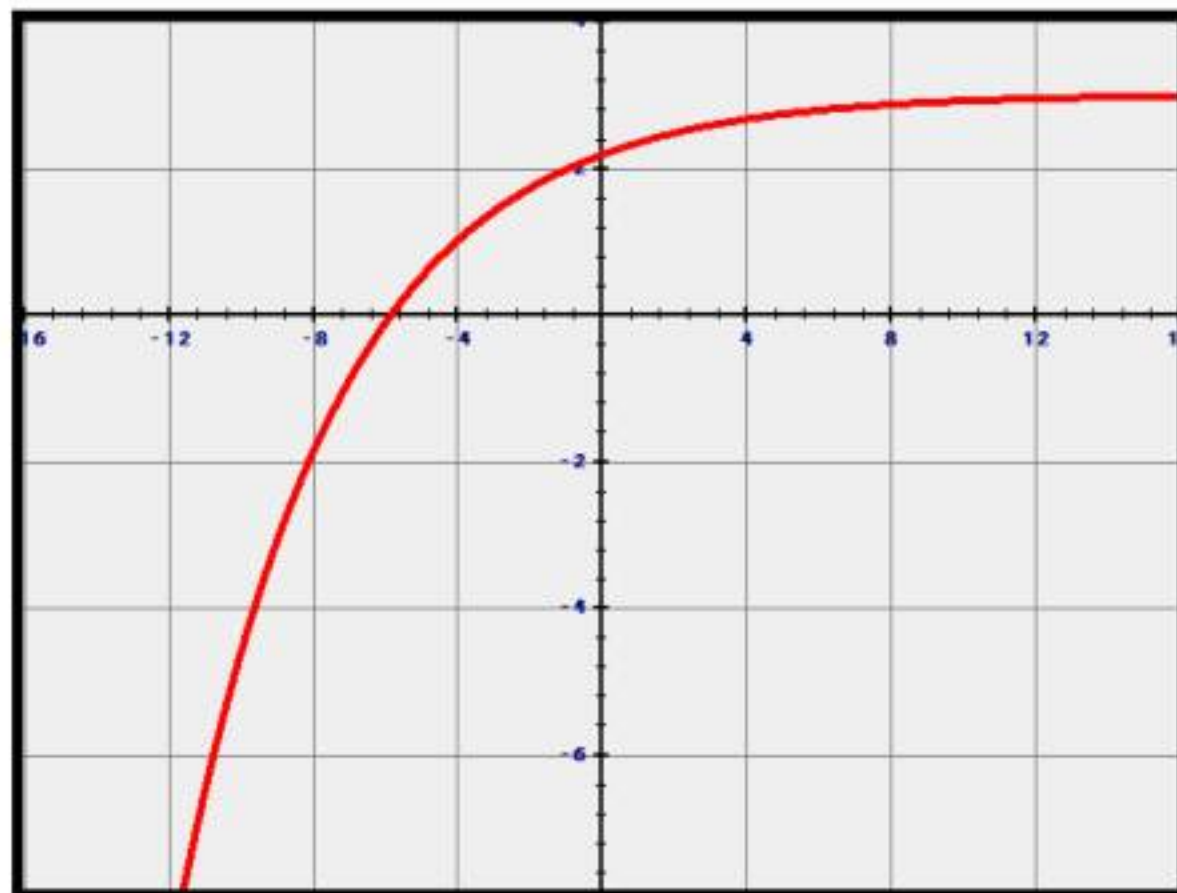
المدى: $\{y \mid y > -4\}$





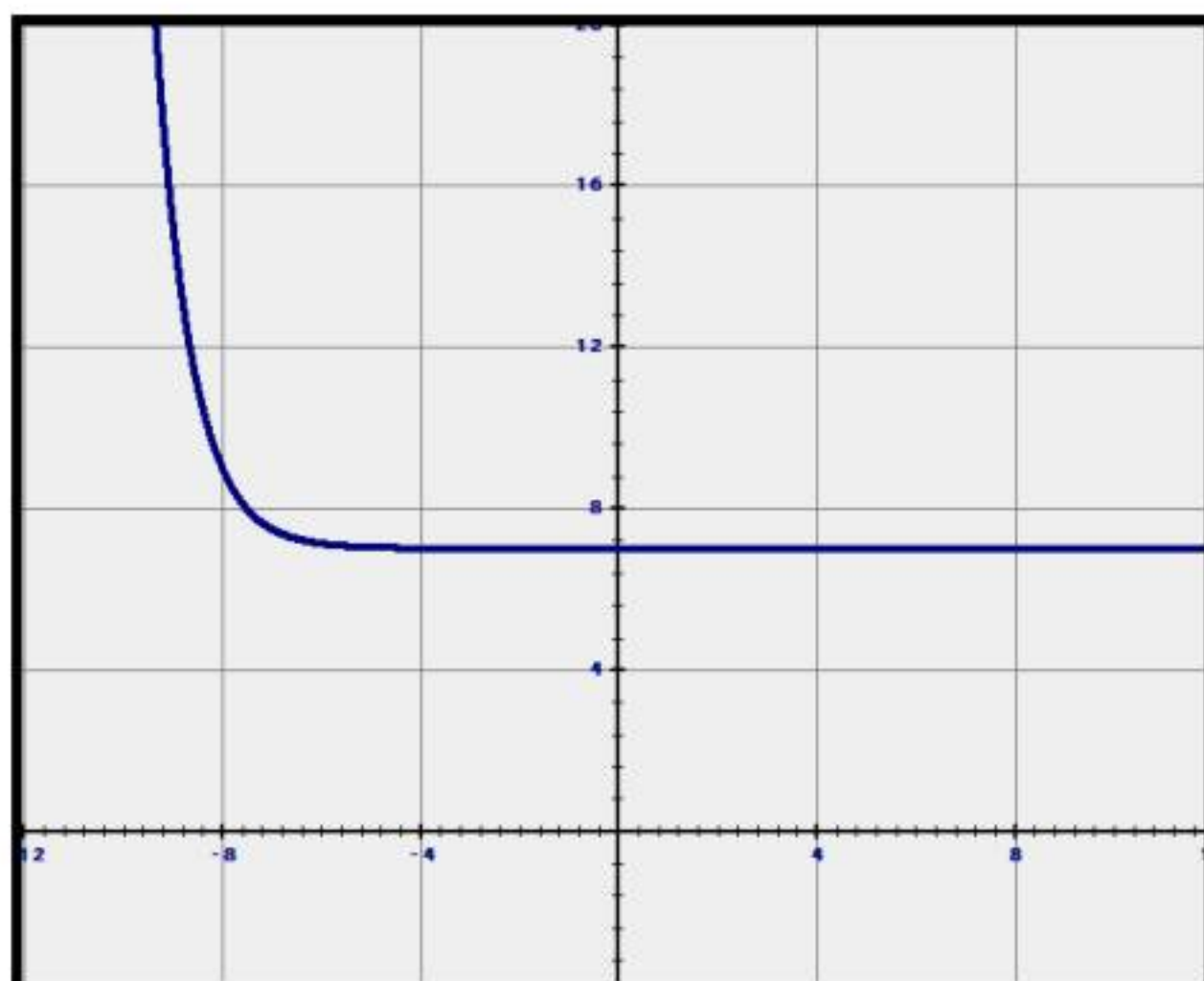
(14)

المجال: R
المدي: $\{y \mid y < 5\}$



(15)

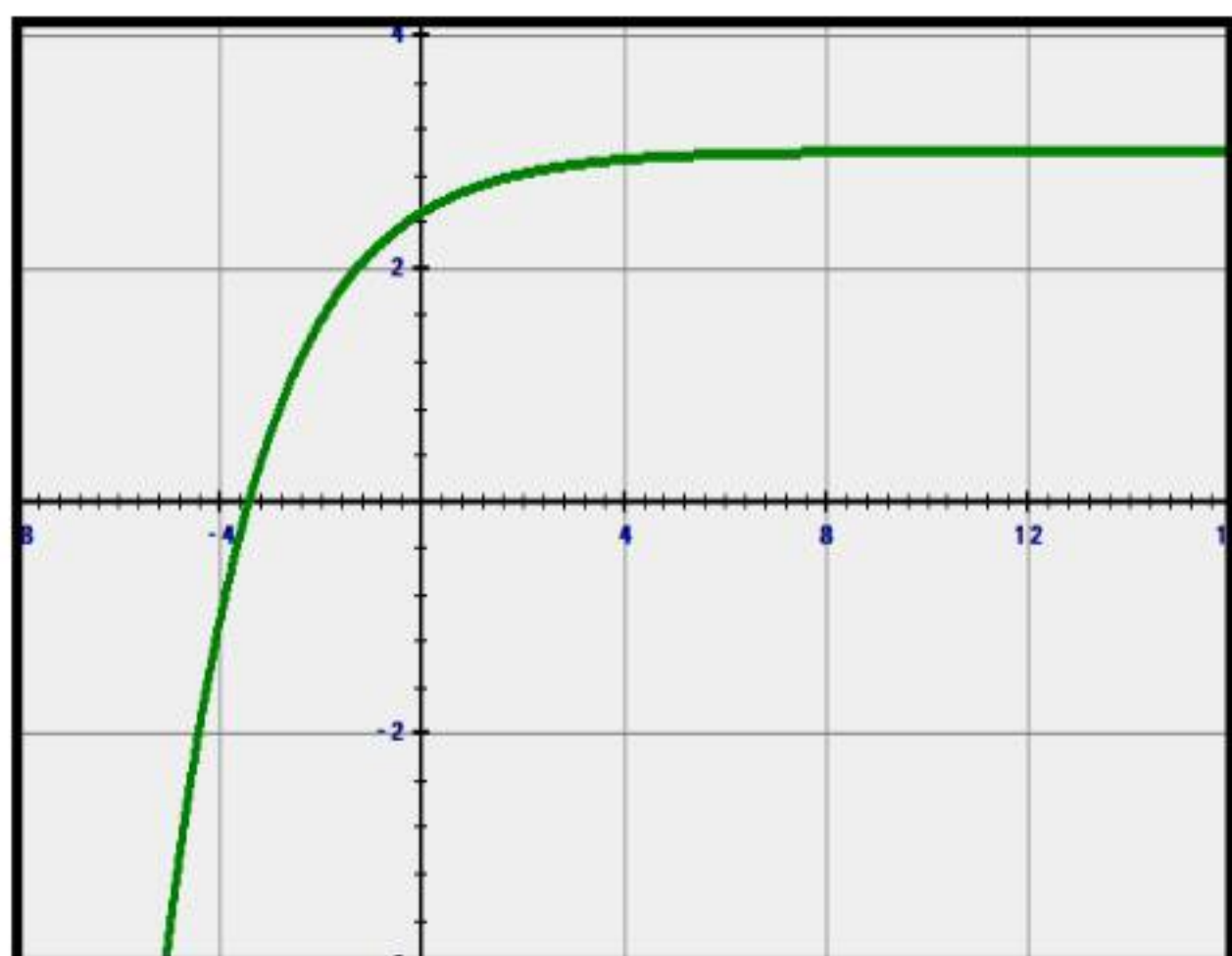
المجال: R
المدي: $\{y \mid y < 3\}$



(16)

المجال: R
المدي: $\{y \mid y > 7\}$

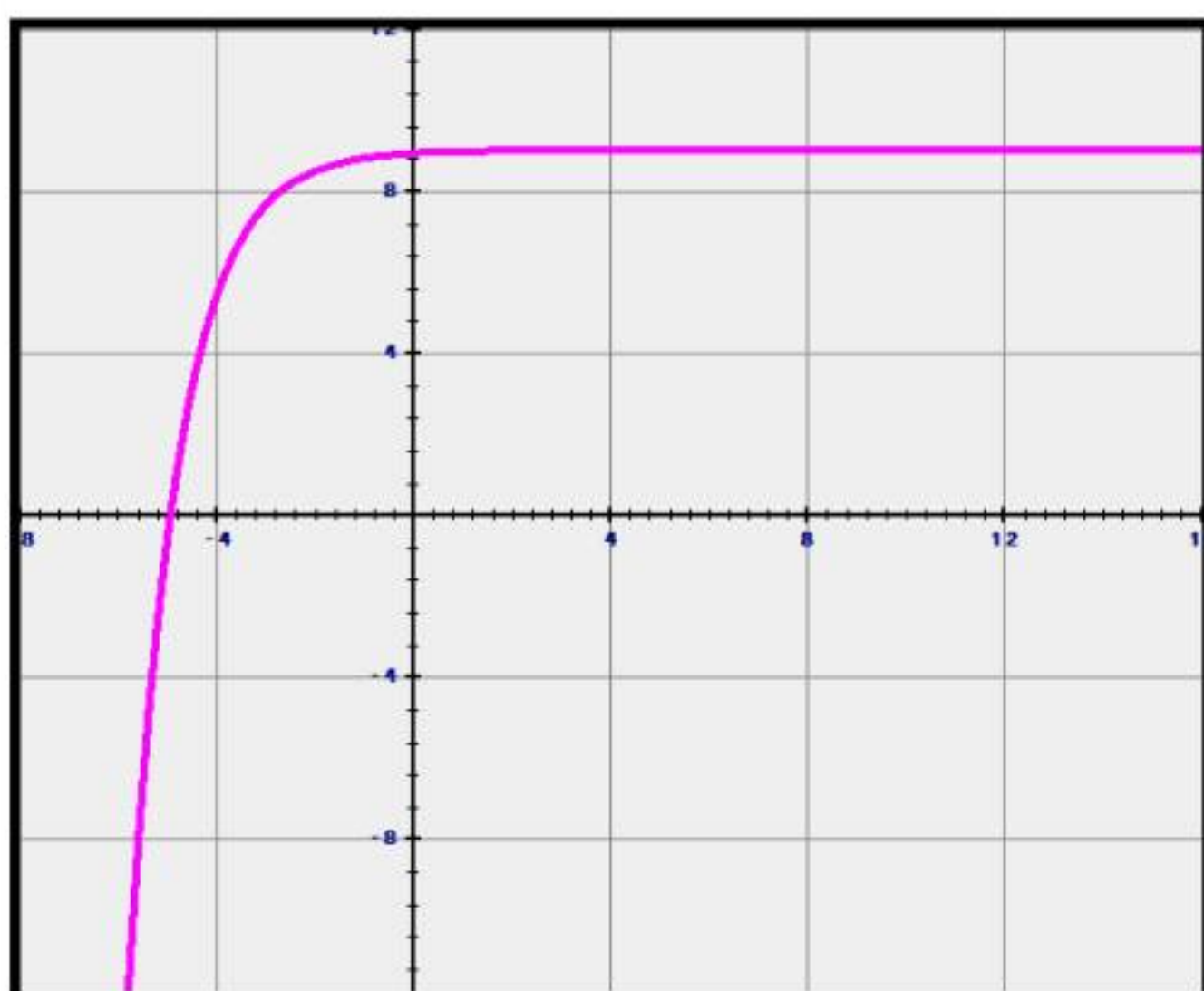
(17)



المجال: R

المدى: $\{y \mid y < 3\}$

(18)



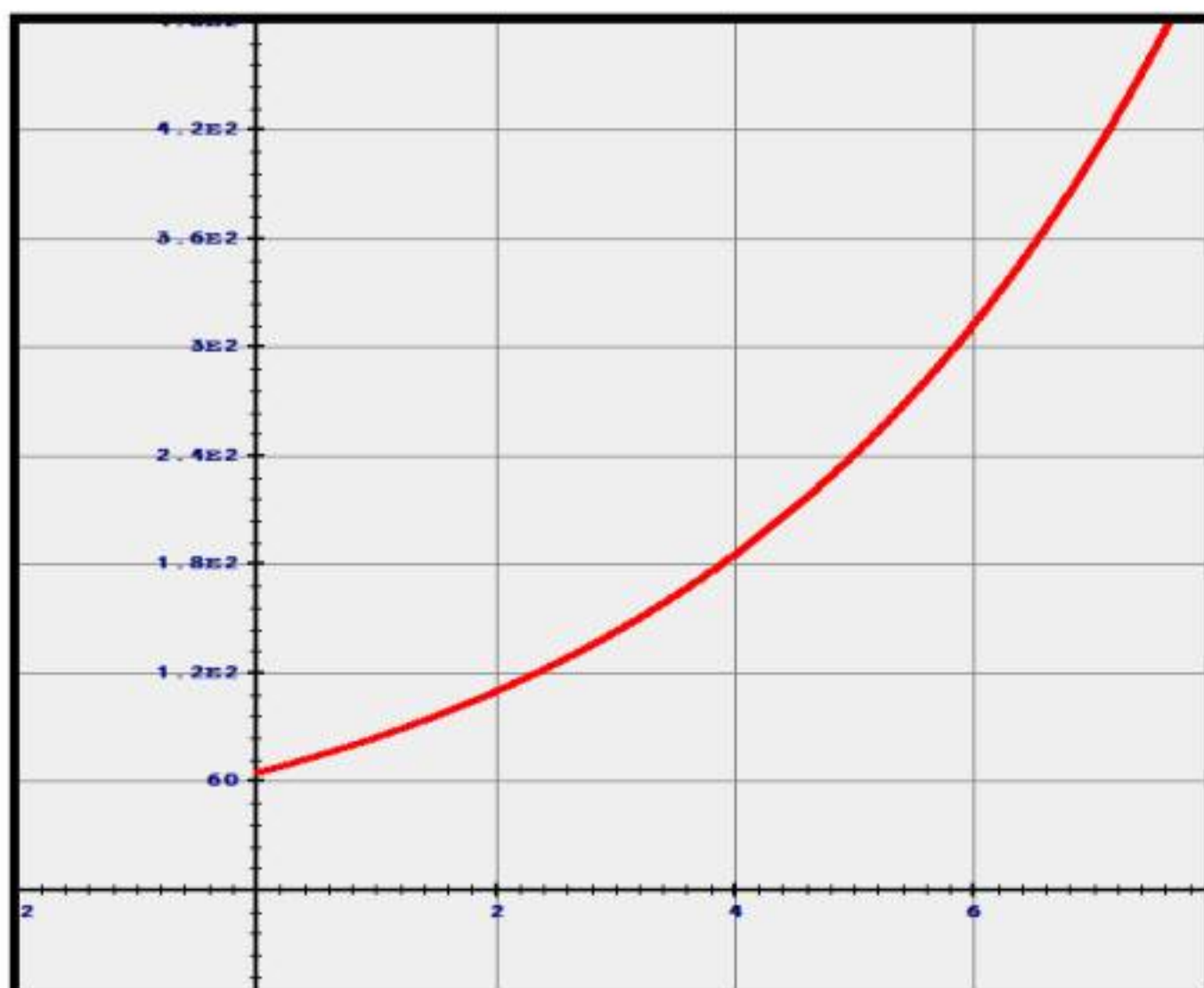
المجال: R

المدى: $\{y \mid y < 4\}$

(19) علوم:

المعادلة $y = 65(1.3)^t$

عدد النحل بعد 10 اسابيع 896 نحلة.

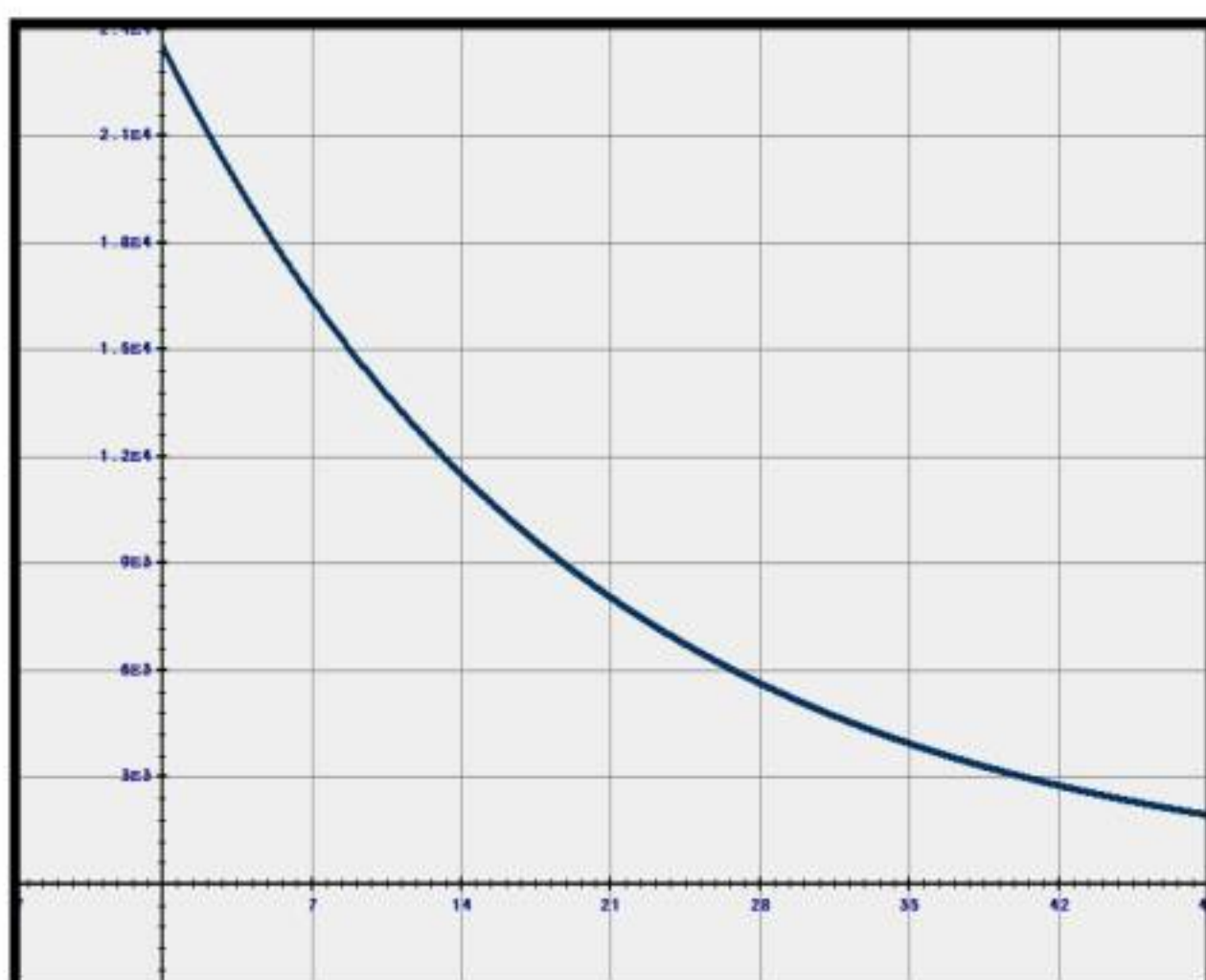


(20) كرة سلة:

المعادلة $y = 23500(0.95)^t$

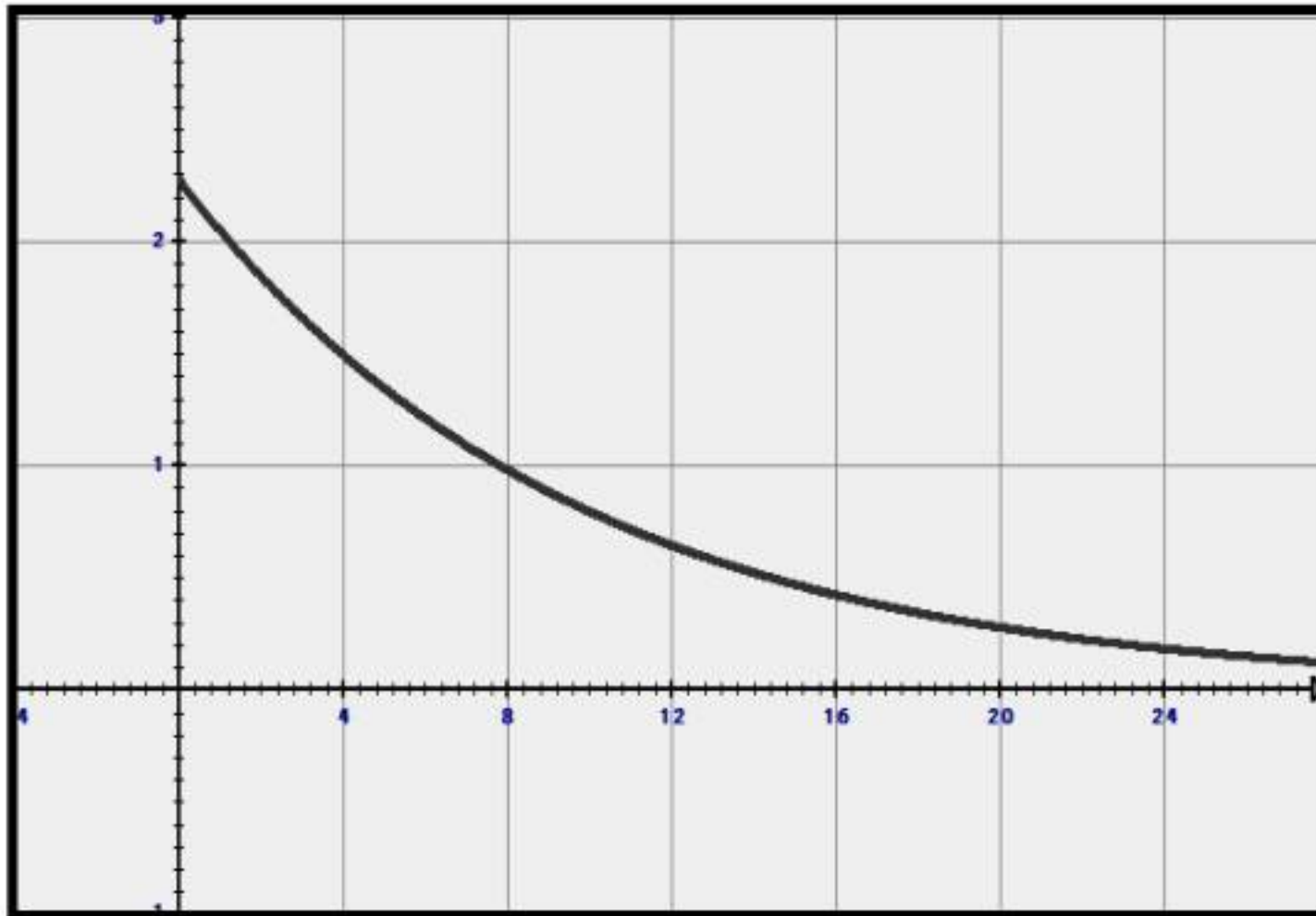
ويكون الحضور 10887 تقريباً في المباراة

رقم 15



(21) هواتف:

(a) بيانياً:



(b) لفظياً:

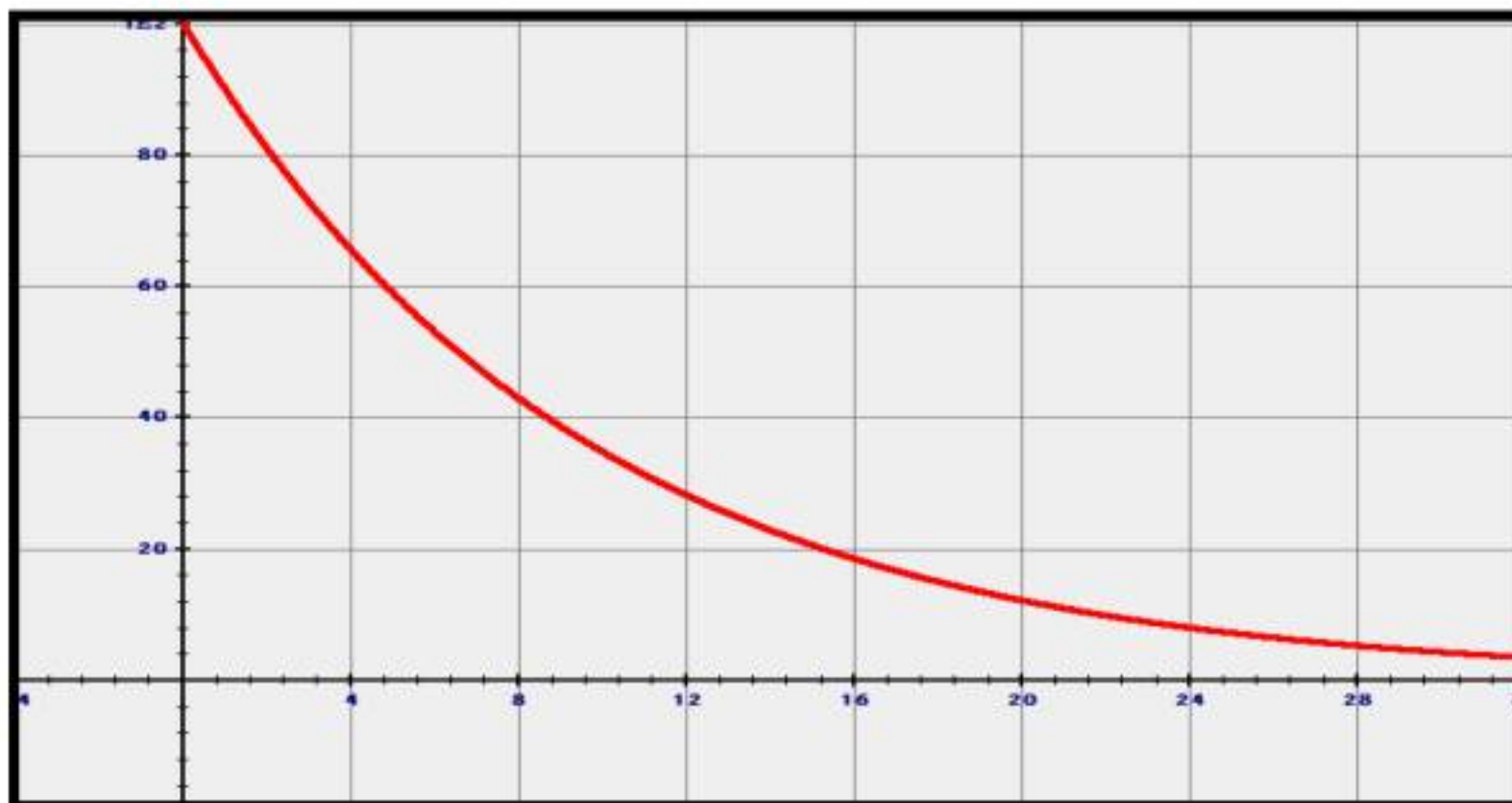
يمثل المقطع $P(x)$ عدد الهواتف العمومية عام 1420 هـ وخط التقارب هو المحور x ، ويتناقص عدد الهواتف العمومية ليقترُب من 0 ولن يصل إلى 0، وذلك منطقي لأنّه سيكون هناك حاجة دائماً للهواتف العمومية.

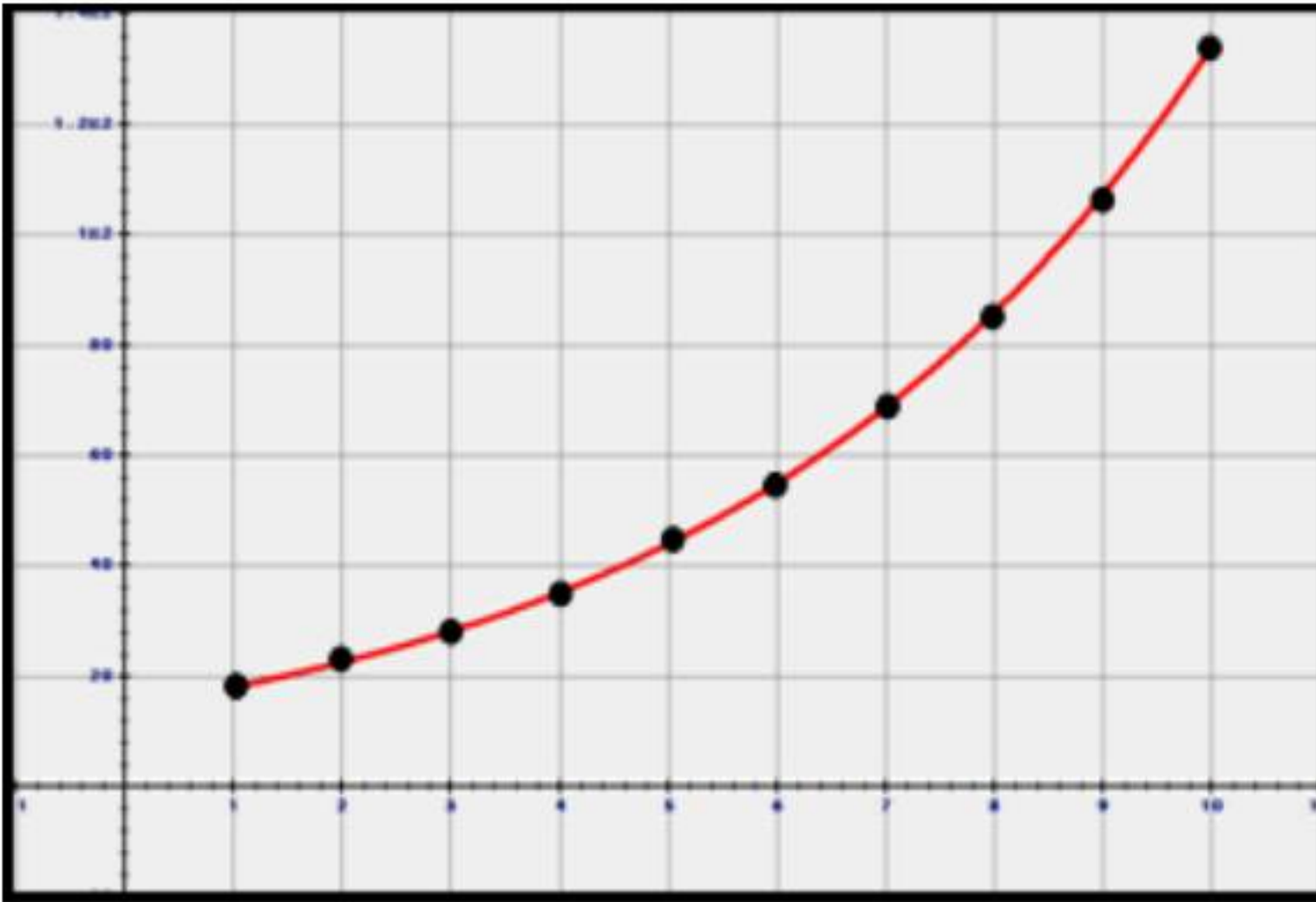
(22) صحة:

(a) بيانياً:

(b) بعد اليوم السادس

(c) أقل من 40





(23) نظرية الأعداد:

$$f(x) = 18(1.25)^{x-1} \quad (a)$$

←←← (b)

(c) الحد العاشر = 134

إذا كانت $f(x)$ هي الدالة الرئيسية (الأم) لكل دالة ممثلة بيانياً أدناه، التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x)$ ، فأوجد الدالة $g(x)$:

(24)

$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = 4(2)^{x-3} = \frac{1}{2}(2)^x$$

(25)

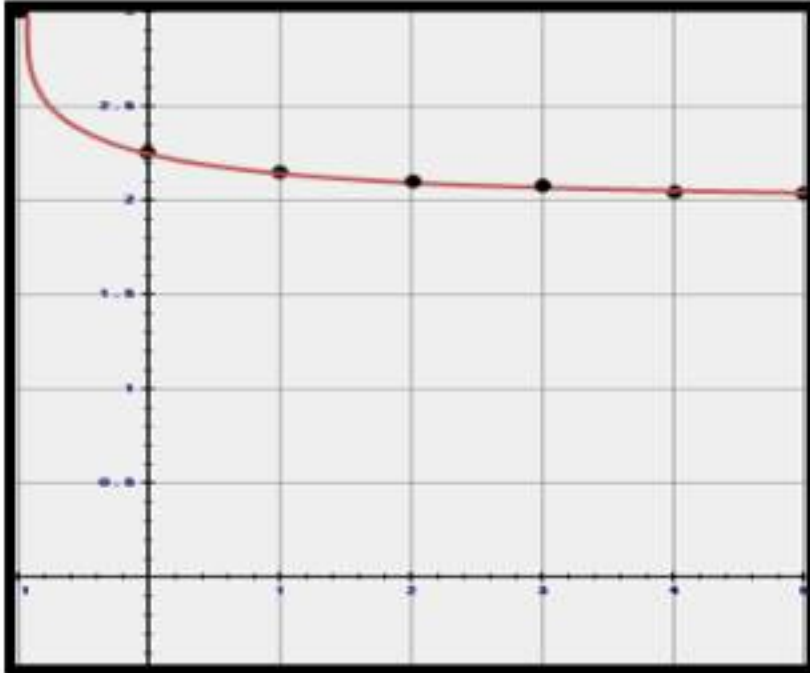
$$f(x) = 4^x$$

$$g(x) = -2(4)^{x+1} + 3$$

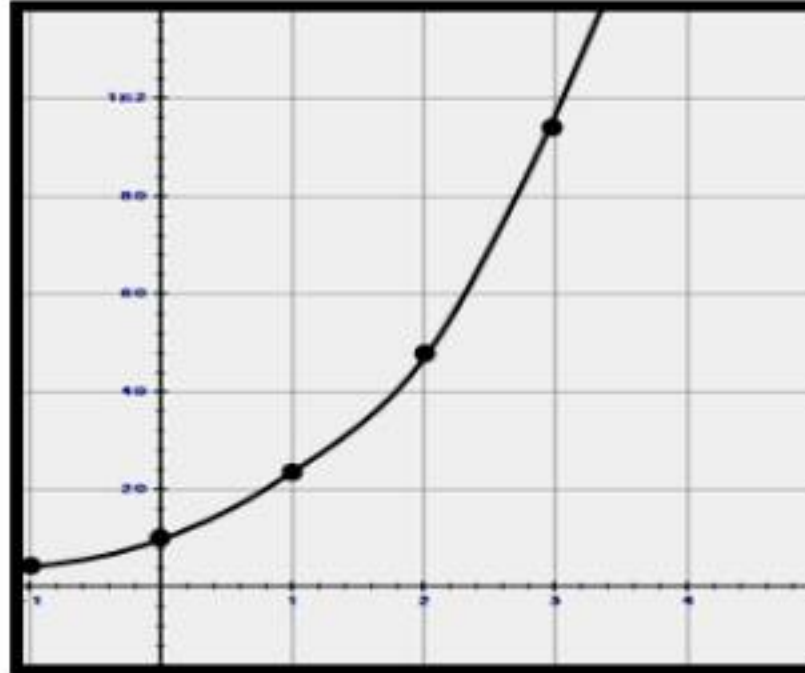
(26) تمثيلات متعددة:

(a) بيانياً:

$h(x)$



$g(x)$



$f(x)$



(b) لفظياً:

تمثيل الدالة $f(x)$ البياني هو إنعكاس في المحور x وقيم المخرجات في الجدول سالبة.

(c) تحليلياً:

$h(x)$

(d) تحليلياً:

$f(x)$ و $g(x)$ دالتين نمو أسّي على حين أن $h(x)$ دالة اضمحلال أسّي والقيم المطلقة للمخرجات متزايدة لدوال النمو الأسّي ومتناقصة لدوال الاضمحلال.

(27) مدارس:

$$1424 - 1335 = 89$$

$$N = 110(1.055)^t$$

$$N = 110(1.055)^{89}$$

$$N = 12908$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

(28) تحديد:

حيث ان المنحنى يمر بالنقطتين (0,3) اذن مقطع المحور y وقيمة a هو 3

بالتعويض بقيم x و y من النقطة (1,6) في قيم b

$$y = ab^x \quad \text{دالة اسية}$$

$$6 = 3b^1 \quad \text{بالتعويض عن } x = 1 \text{ و عن } y = 6 \text{ و عن } a = 3$$

$$6 = 3b^1$$

$$2 = b$$

الدالة الاسية الي منحناها يمر بالنقطتين (0,3) و (1,6) هي $y = (3)(2)^x$

(29) تبرير:

(a) صحيحة دائماً، مجال الدالة الأسية هو مجموعة الأعداد الحقيقية لذا فإن (0,y) دائماً موجودة.

(b) صحيحة أحياناً، التمثيل البياني للدالة الأسية يقطع المحور x عند $K < 0$

(c) صحيحة أحياناً، والدالة ليست أسية إذا كانت $b = 1$ أو $b = -1$

(30) اكتشف الخطأ:

ماجد، أهمل **عمر** الضرب في إشارة سالب.

(31) تحديد:

حوالي 251 mg

(32) مسألة مفتوحة:

$$b = 10$$

(33) أكتب:

الدالة الرئيسية الأم هي $g(x) = b^x$ يتمدد تمثيلها البياني إذا كانت $|a| > 1$ وتقلص إذا كانت $|a| < 1$ ، ثم تتبعها إنسحاب للتمثيل البياني k وحدة للأعلى إذا كانت k موجبة، وللأسفل إذا كانت سالبة، ثم تتبعها إنسحاب h وحدة يميناً إذا كانت h موجبة و h يساراً إذا كانت سالبة.

مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة مقرباً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عددياً:

(34)

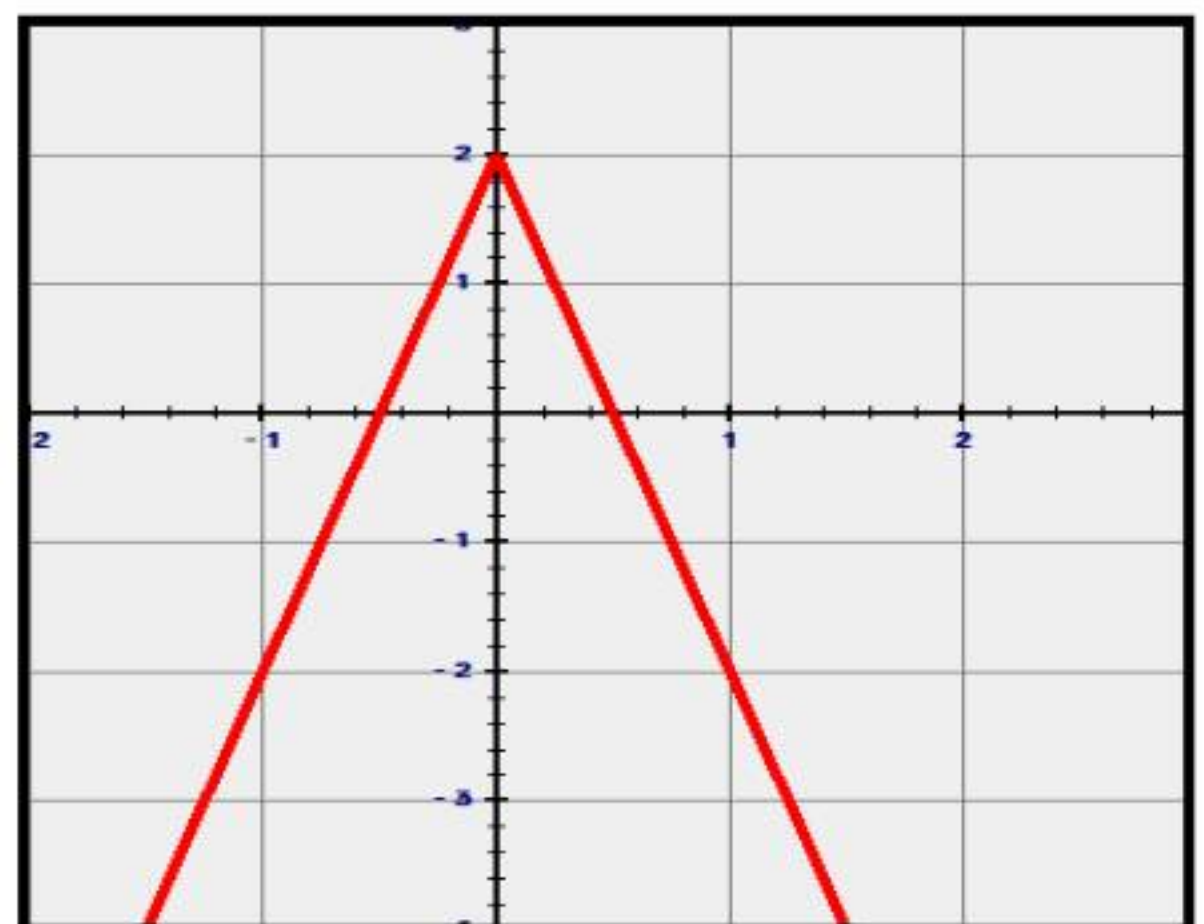
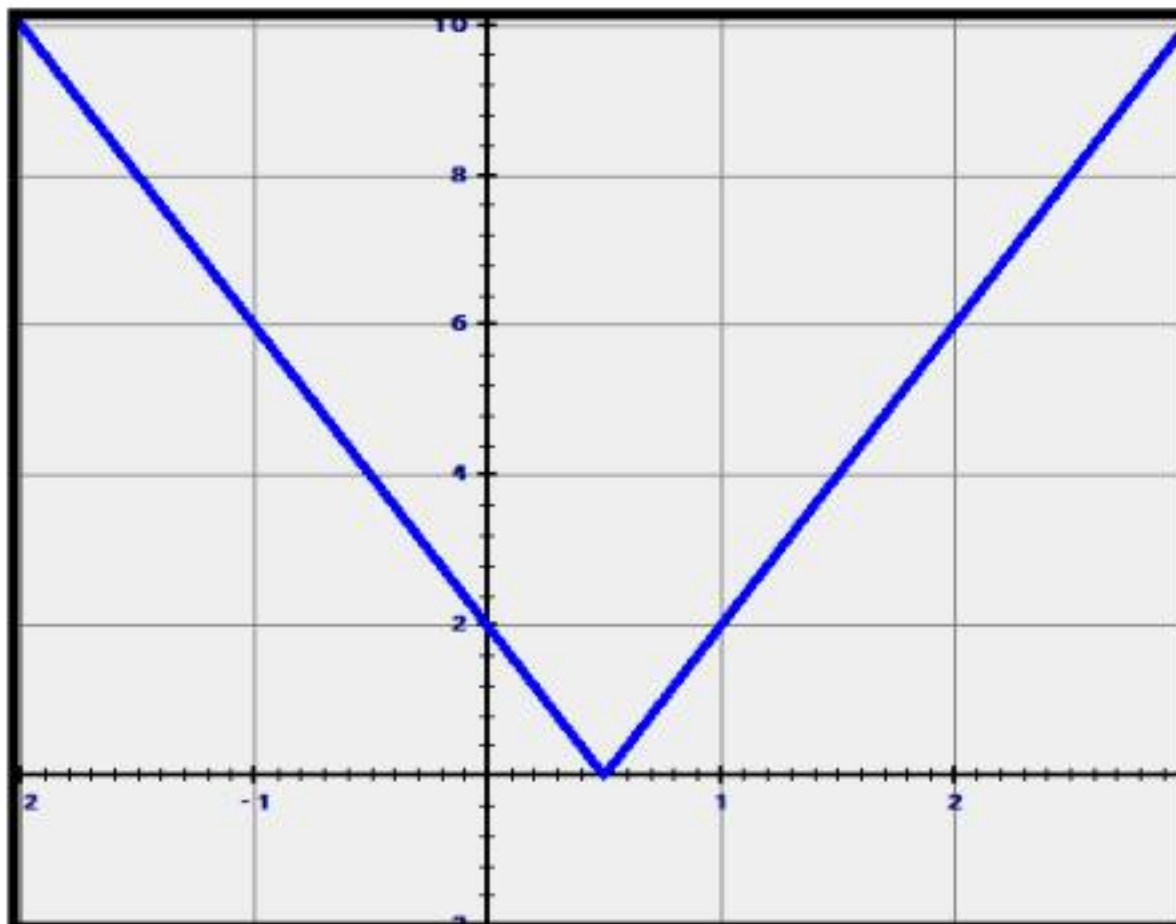
الدالة f تتزايد على $(-\infty, -2.7)$ وتتناقص على $(-2.7, 0.7)$ وتزايد على $(0.7, \infty)$

(35)

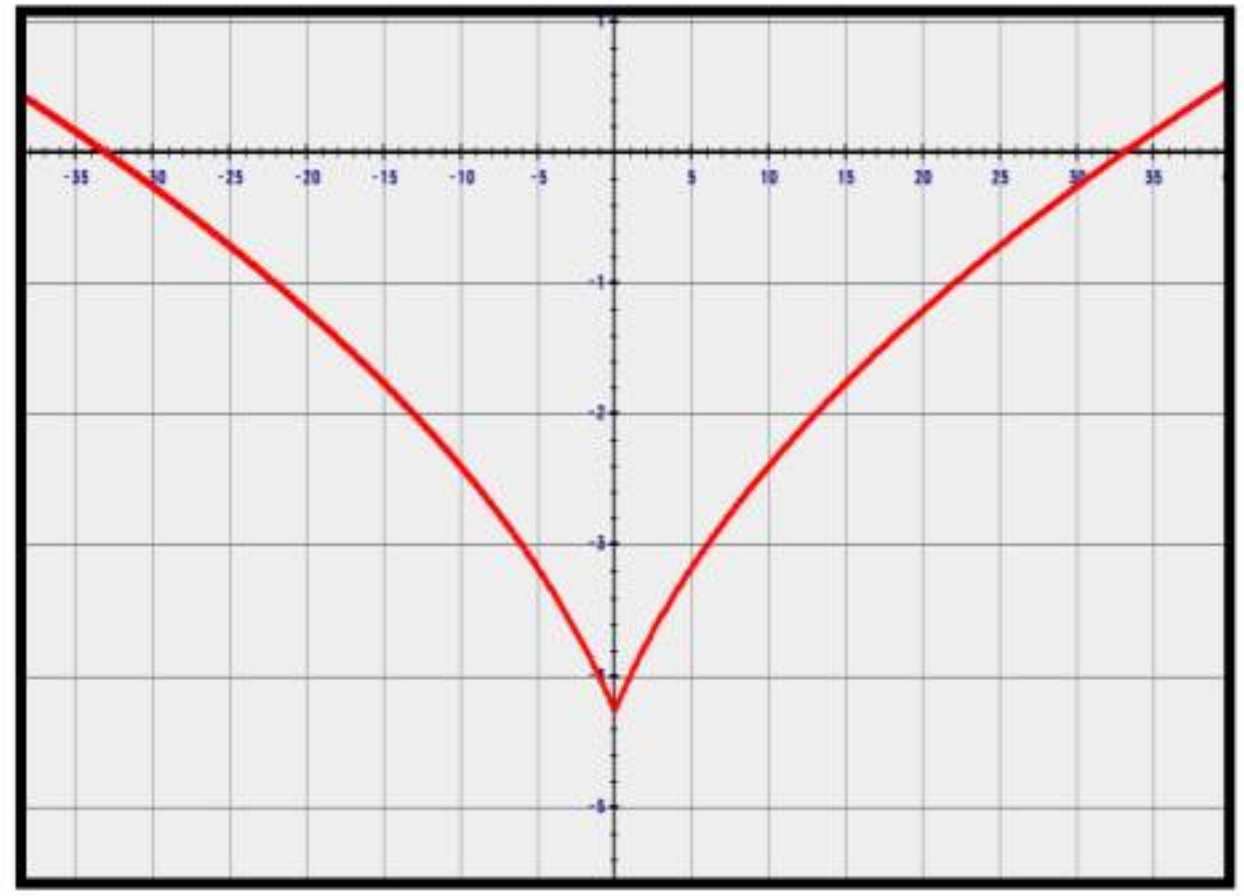
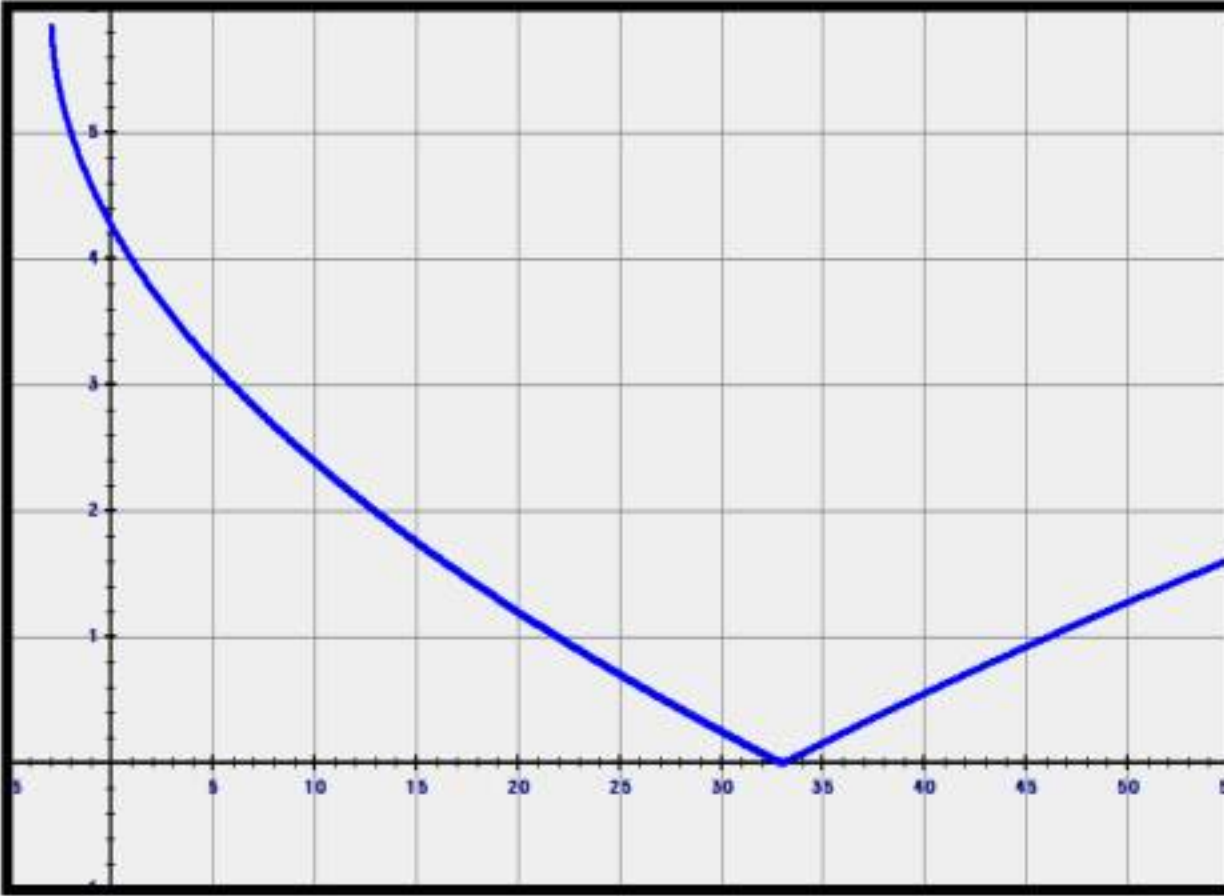
الدالة f تتزايد على $(-\infty, -4)$ ثم تتزايد على $(-4, \infty)$

استعمل منحنى $f(x)$ الدالة لتمثيل كل من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ ، $h(x) = f(|x|)$

$$f(x) = -4x + 2 \quad (36)$$



$$f(x) = \sqrt{x+3} - 6 \quad (37)$$



أوجد $(f + g)(x)$ ، $(f - g)(x)$ ، $(f \square g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في

كل مما يأتي وحدد مجال كل من الدوال الناتجة:

(38)

$$(f + g)(x) = x^2 - x + 9$$

المجال: $(-\infty, \infty)$

$$(f - g)(x) = x^2 - 3x - 9$$

المجال: $(-\infty, \infty)$

$$(f \square g)(x) = x^3 + 7x^2 - 18x$$

المجال: $(-\infty, \infty)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 9}$$

المجال: $\{x | x \neq -9, x \in R\}$

(39)

$$(f + g)(x) = \frac{x}{x + 1}$$

المجال: $\{x | x \neq -1, x \in R\}$

$$(f - g)(x) = \frac{x}{x + 1}$$

المجال: $\{x | x \neq -1, x \in R\}$

$$(f \square g)(x) = x^2 - 1$$

المجال: $\{x | x \neq -1, x \in R\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{(x - 1)(x + 1)^2}$$

المجال: $\{x | x \neq \pm 1, x \in R\}$

تدرب على اختبار:

(40)

$$3 \leftarrow \leftarrow \leftarrow A$$

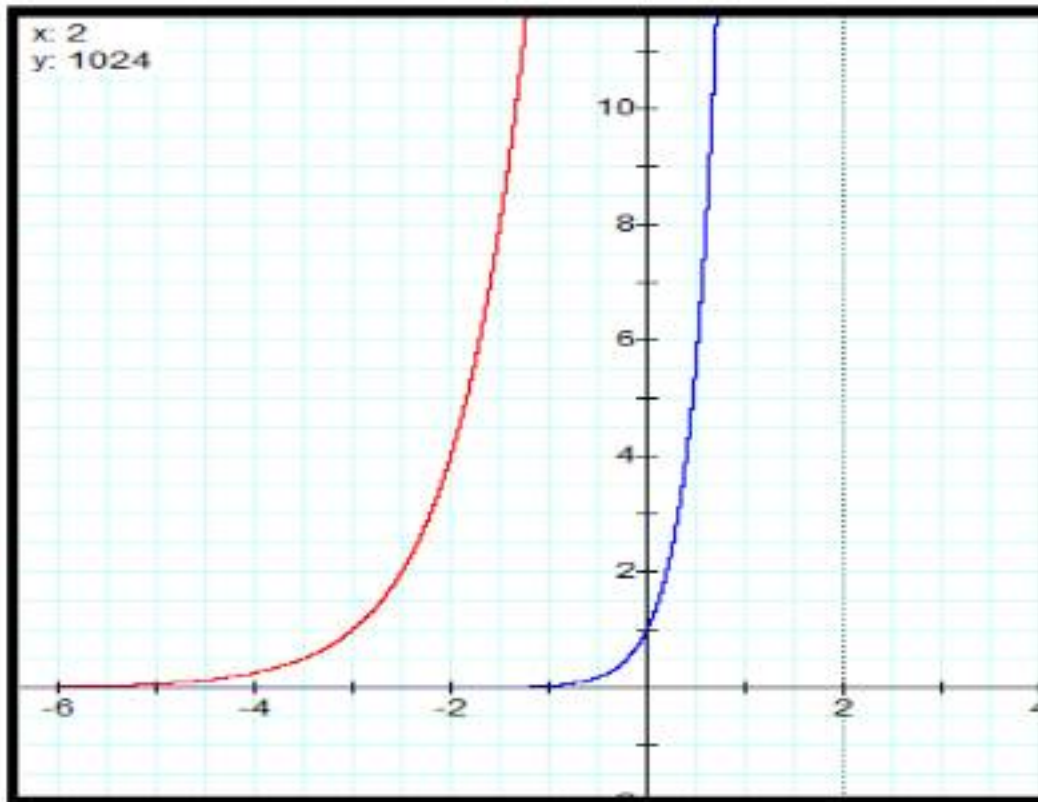
(41)

$$4\sqrt{3} \leftarrow \leftarrow \leftarrow C$$

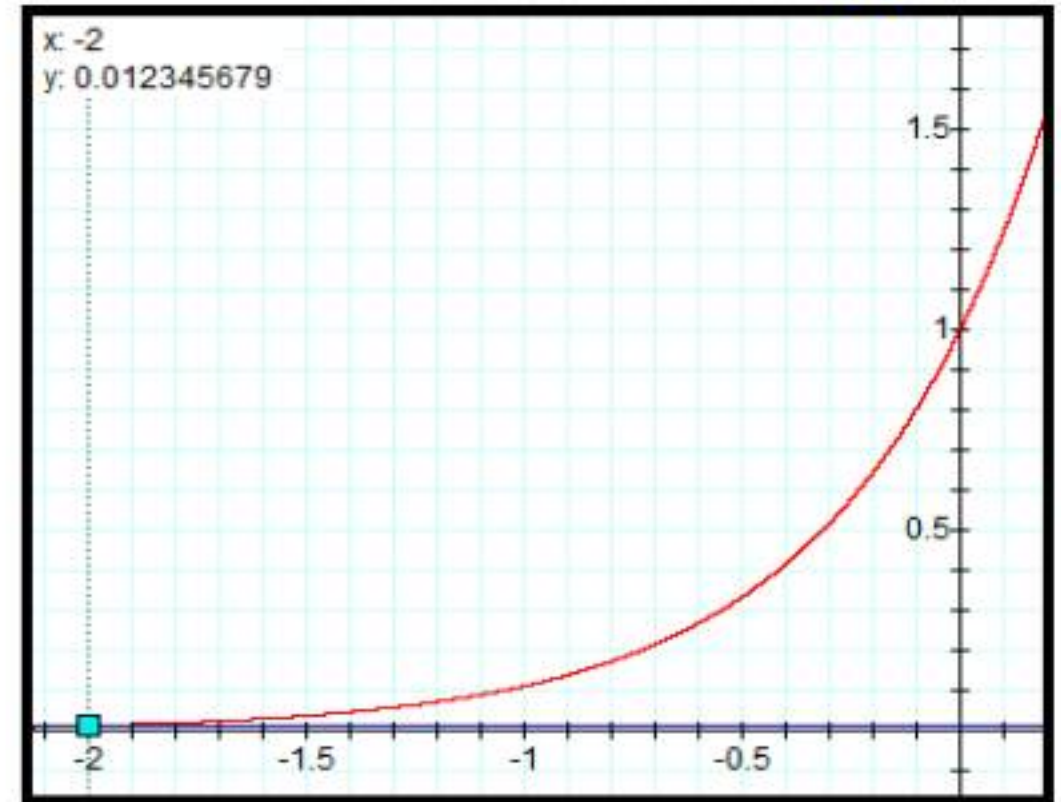
معمل الحاسبة البيانية : حل المعادلات والمتباينات الأسية

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل معادلة مما يأتي:

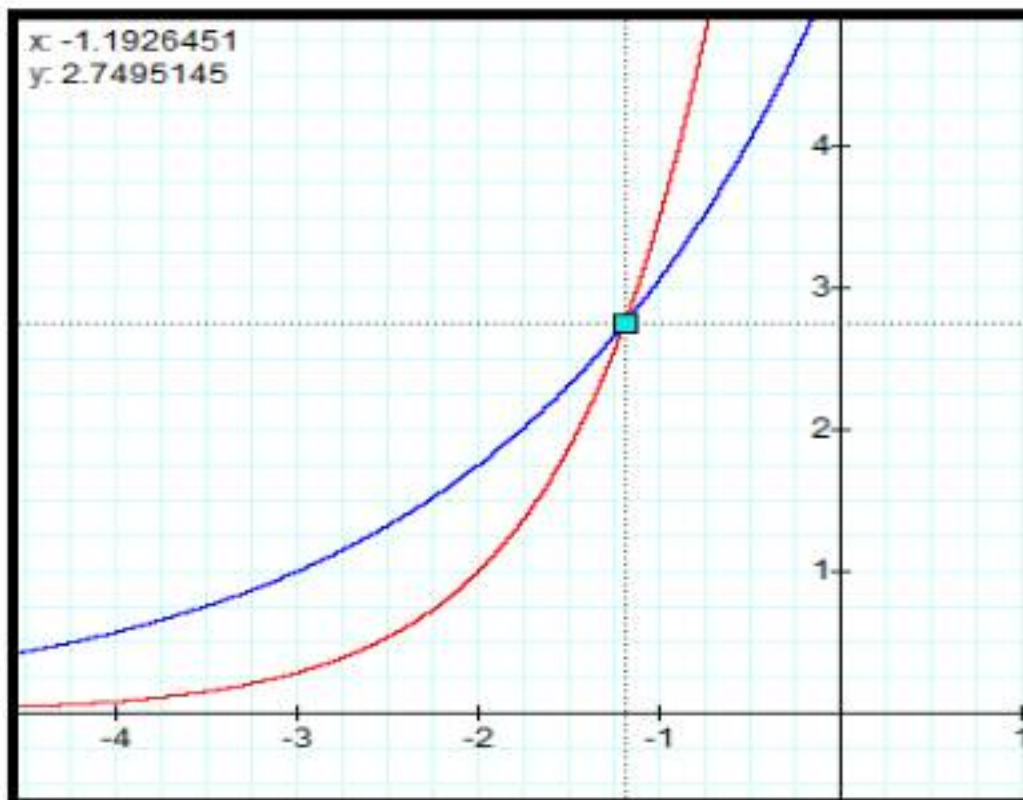
$$(x = 2) \quad 4^{x+3} = 2^{5x} \quad (2)$$



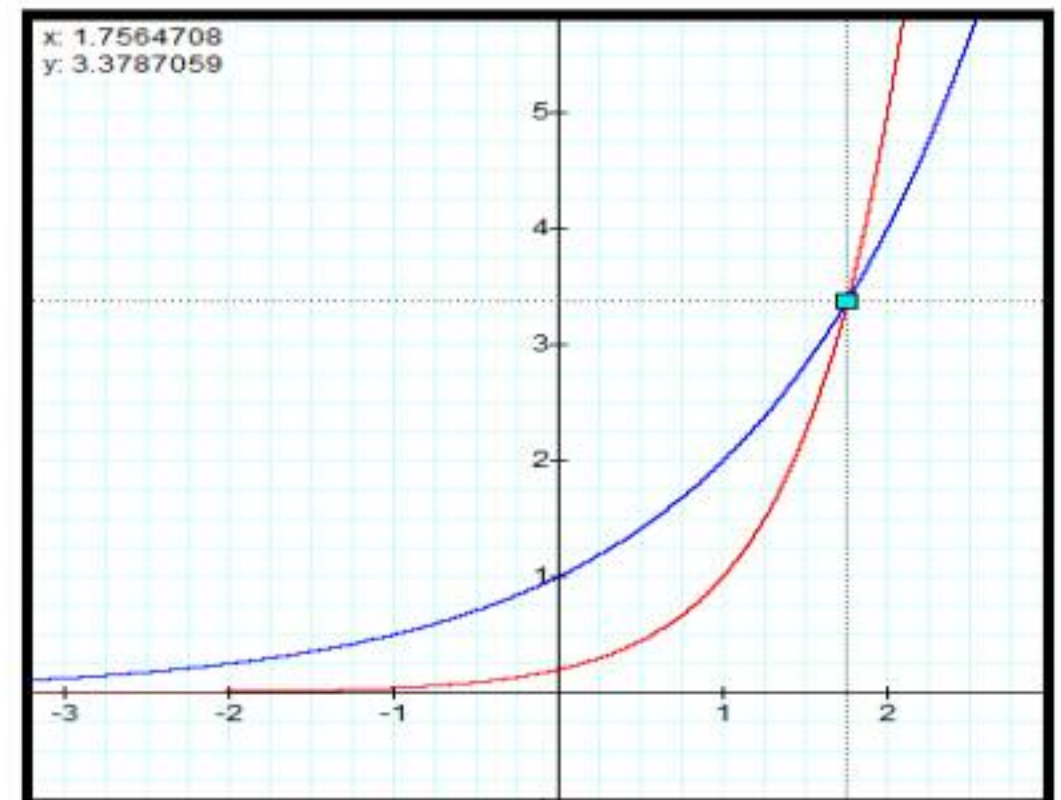
$$(x = -2) \quad 9^x = \frac{1}{81} \quad (1)$$



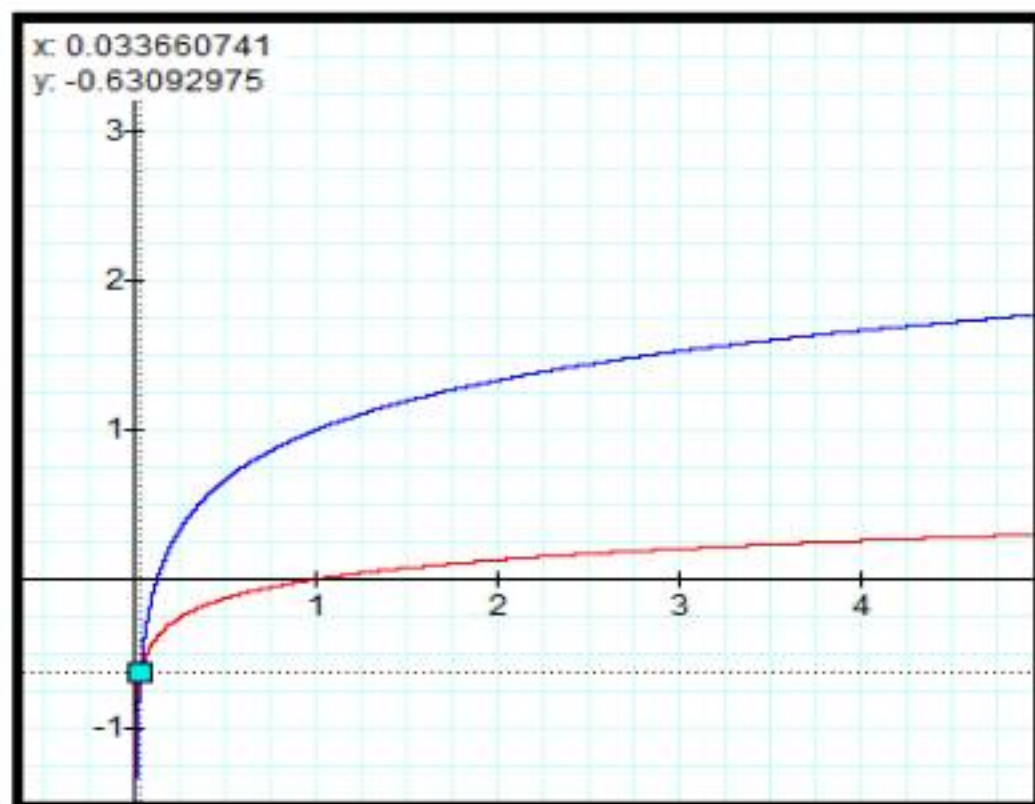
$$(x = -1.19) \quad 3.5^{x+2} = 1.75^{x+3} \quad (4)$$



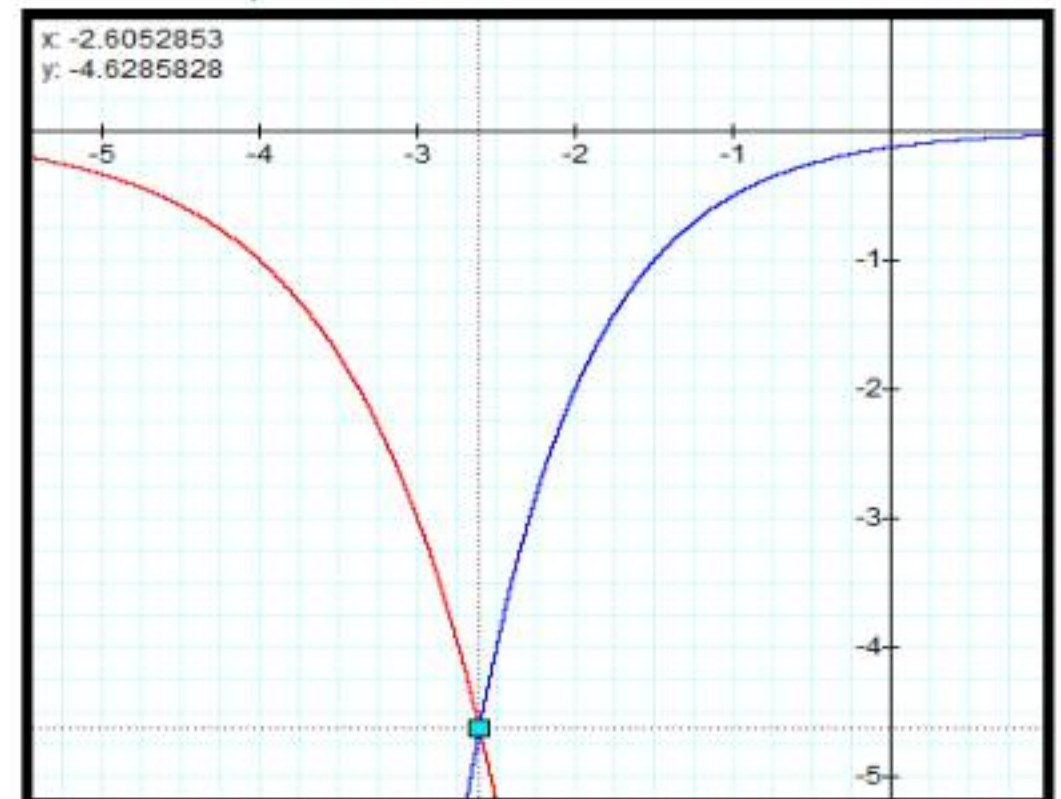
$$(x = 1.758) \quad 5^{x-1} = 2^x \quad (3)$$



$$(y = -0.63) \quad 6^{3y} = 8^{y-1} \quad (6)$$



$$(x = -2.6) \quad -3^{x+4} = -0.5^{2x+3} \quad (5)$$

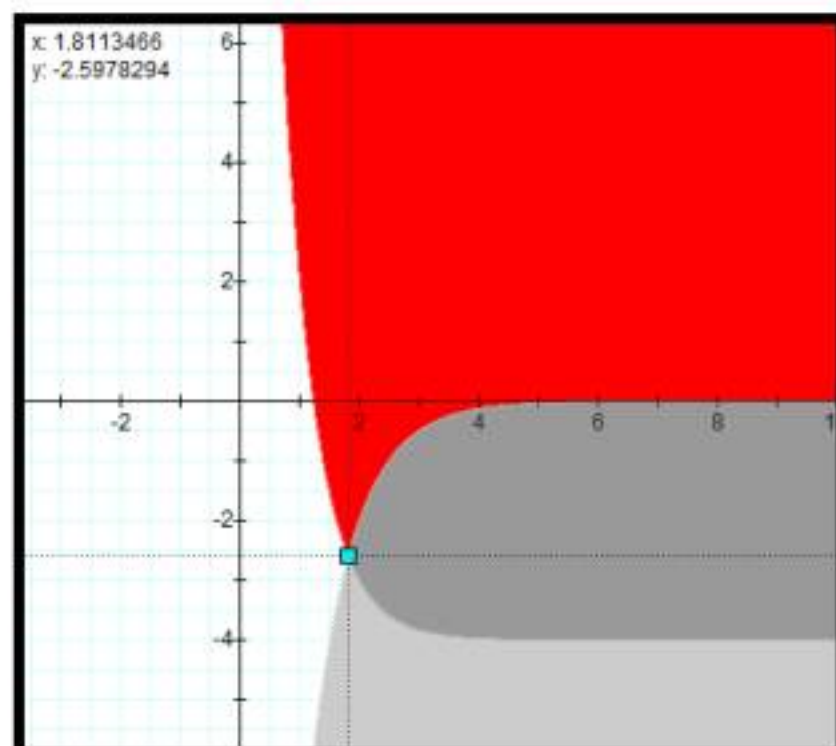


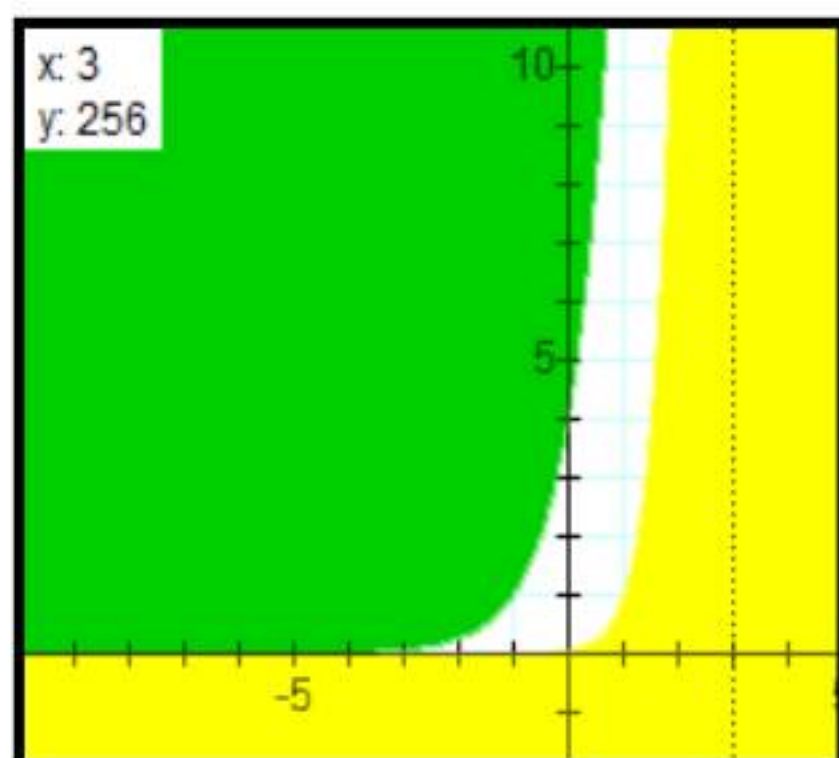
تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل متباينة مما يأتي:

(7)

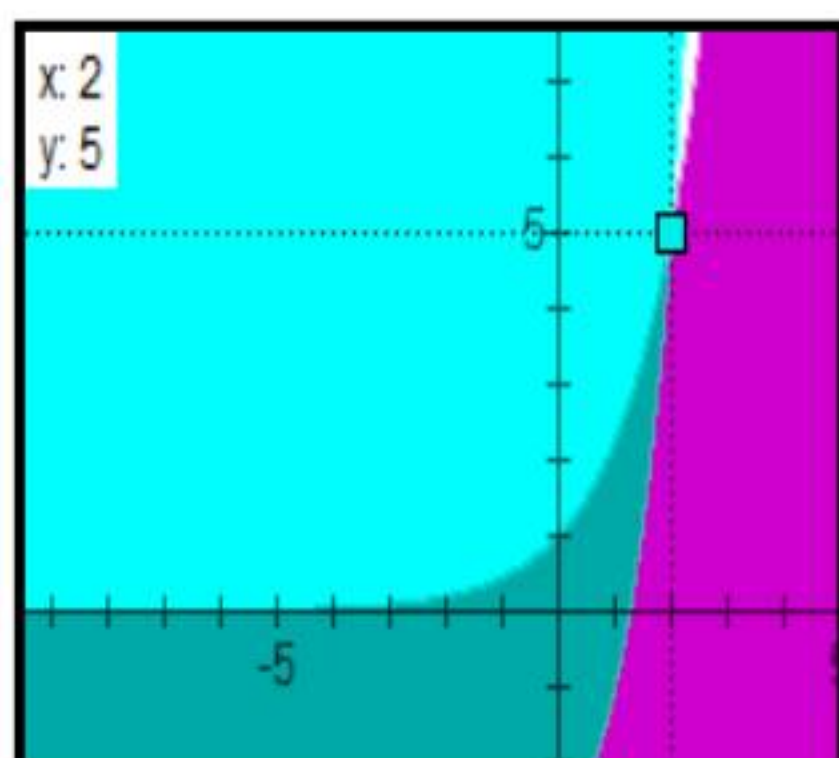
$$\{x \mid x > 1.8\}$$





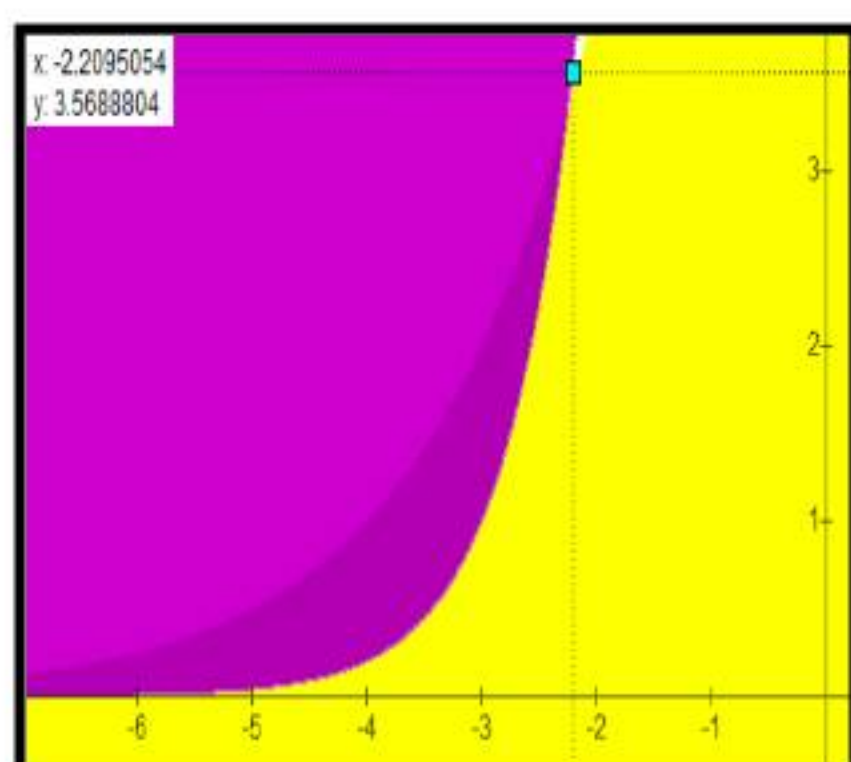
(8)

$$\{x | x > 3\}$$



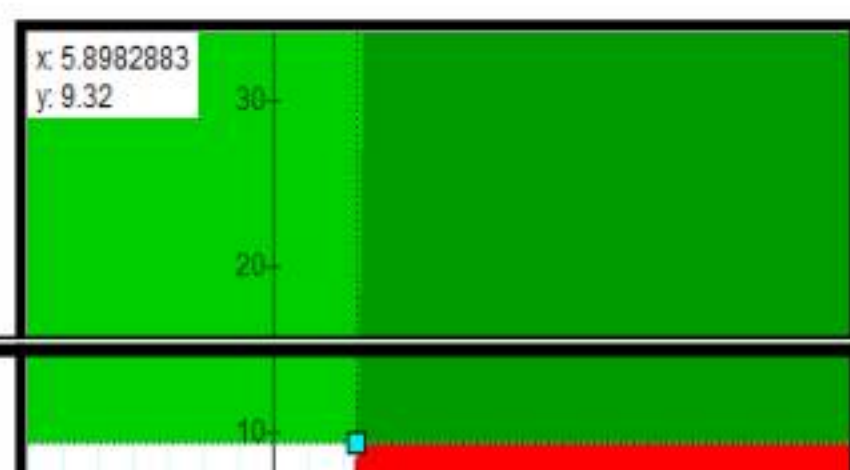
(9)

$$\{x | x < 2\}$$



(10)

$$\{x | x \leq -2.2\}$$

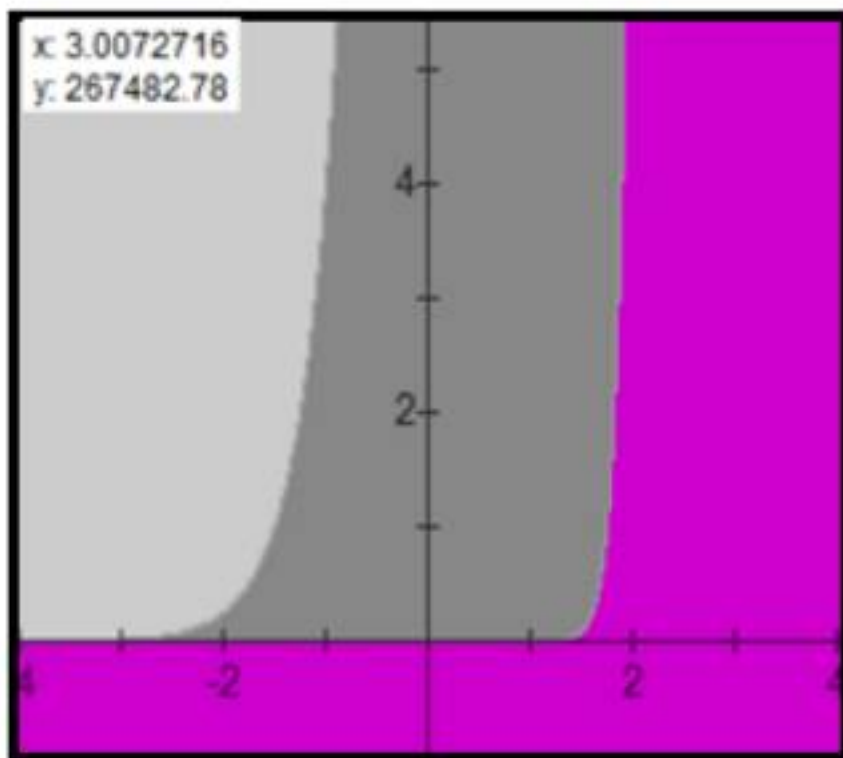


(11)

$$\{x | x \geq 5.8983\}$$

(12)

$$\{x | x < 3.0072716\}$$



(13) **أكتب:**

بما أن النظام يتكون من عبارات في كل من الطرفين، فمهما كانت قيم حلول النظام ستحقق أي من المعادلة أو المتباينة.

(2-2) حل المعادلات والمتباينات الأسية

■ **تحقق من فهمك:**

(1A)

$$4^{2n-1} = 64 = 4^3$$

$$\therefore 2n - 1 = 3$$

$$\therefore 2n = 4$$

$$\therefore n = 2$$

(1B)

$$5^{5x} = 125^{x+2} = 5^{3(x+2)}$$

$$\therefore 5x = 3x + 6$$

$$\therefore 2x = 6$$

$$\therefore x = 3$$

■ تحقق من فهمك:

(2) إعادة تصنيع:

$$y = 3.2 \times 10^6 (0.6)^x \quad (2A)$$

(2B) لا شيء.

■ تحقق من فهمك:

(3)

$$100000 \left(1 + \frac{0.12}{24} \right)^{24.5} = 127117.29 \text{ ريالاً}$$

■ تحقق من فهمك:

(4B)

$$2^{x+2} > 2^{-5}$$

$$\therefore x + 2 > -5$$

$$\therefore x > -5 - 2$$

$$\therefore x > -7$$

(4A)

(4)

$$3^{2x-1} \geq 3^{-5}$$

$$\therefore 2x - 1 \geq -5$$

$$\therefore 2x \geq -4$$

$$\therefore x \geq -2$$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي:

(1)

$$8^{4x+2} = 64 = 8^2$$

$$\therefore 4x + 2 = 2$$

$$\therefore 4x = 0$$

$$\therefore x = 0$$

(2)

$$5^{x-6} = 124 = 5^3$$

$$\therefore x - 6 = 3$$

$$\therefore x = 3 + 6$$

$$\therefore x = 9$$

(3)

$$3^{5x} = 27^{2x-4} = 3^{3(2x-4)}$$

$$\therefore 5x = 6x - 12$$

$$\therefore -x = -12$$

$$\therefore x = 12$$

(4)

$$16^{2y-3} = 4^{2(2y-3)} = 4^{y+1}$$

$$\therefore 4y - 6 = y + 1$$

$$\therefore 3y = 7$$

$$\therefore y = \frac{7}{3}$$

(5)

$$2^{6x} = 32^{x-2} = 2^{5(x-2)}$$

$$\therefore 6x = 5x - 10$$

$$\therefore x = -10$$

(6)

$$49^{x+5} = 7^{2(x+5)} = 7^{8x-6}$$

$$\therefore 2x + 10 = 8x - 6$$

$$\therefore 6x = 16$$

$$\therefore x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

(7)

$$81^{a+2} = 3^{4(a+2)} = 3^{3a+1}$$

$$\therefore 4a + 8 = 3a + 1$$

$$\therefore a = 1 - 8$$

$$\therefore x = -7$$

(8)

$$256^{b+2} = 4^{4(b+2)} = 4^{2-2b}$$

$$\therefore 4b + 8 = 2 - 2b$$

$$\therefore 6b = -6$$

$$\therefore b = -1$$

(9)

$$9^{3c+1} = 3^{2(3c+1)} = 27^{3c-1} = 3^{3(3c-1)}$$

$$\therefore 6c + 2 = 9c - 3$$

$$\therefore 3c = 5$$

$$\therefore c = \frac{5}{3}$$

(10)

$$8^{2y+4} = 16^{y+1}$$

$$\therefore 2^{3(2y+4)} = 2^{4(y+1)}$$

$$\therefore 6y + 12 = 4y + 4$$

$$\therefore 2y = -8$$

$$\therefore y = -4$$

(11) علوم:

$$C = 2^{\frac{t}{15}}$$

(a)

$$C = 2^{\frac{60}{15}} = 2^4 = 16 \text{ خلية}$$

(b)

(12)

$$y = 100000(1.045)^x$$

(a)

$$y = 100000(1.045)^{12} = 241171.4 \text{ ريال}$$

(b)

(13)

$$70000 \left(1 + \frac{0.043}{12} \right)^{12.7} = 94533.78 \text{ تقريبا}$$

(14)

$$50000 \left(1 + \frac{0.0225}{24} \right)^{24.6} = 57223.22 \text{ ريال}$$

حل كل متباينة مما يأتي:

(15)

$$4^{2x+6} \geq 64^{2x-4}$$

$$\therefore 4^{2x+6} \geq 4^{3(2x-4)}$$

$$\therefore 2x + 6 \geq 6x - 12$$

$$\therefore 18 \geq 4x$$

$$\therefore 4.5 \geq x$$

(16)

$$25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125} \right)^{y+3}$$

$$\therefore 25^{y-3} \leq 25^{-2(y+3)}$$

$$\therefore y - 3 \leq -2y - 6$$

$$\therefore 3y \leq -3$$

$$\therefore y \leq -1$$

(17)

$$5^4 \geq 5^{a+8}$$

$$\therefore 4 \geq a + 8$$

$$\therefore -4 \geq a$$

(18)

$$10^{5b+2} > 10^3$$

$$\therefore 5b + 2 > 3$$

$$\therefore 5b > 1$$

$$\therefore b > \frac{1}{5}$$

(19)

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$$

$$\therefore 2^{-6(c-2)} < 2^{5(2c)}$$

$$\therefore -6c + 12 < 10c$$

$$\therefore 12 < 16c$$

$$\therefore \frac{12}{16} < c$$

$$\therefore \frac{3}{4} < c$$

(20)

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{2(3t+5)} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{5(t-6)}$$

$$\therefore 6t + 10 \geq 5t - 30$$

$$\therefore t \geq -40$$

أكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

$$y = 6.4(2.5)^x \quad (21)$$

$$y = 256(0.75)^x \quad (22)$$

$$y = 128(4.926)^x \quad (23)$$

$$y = 144(3.5)^x \quad (24)$$

(25) علوم:

$$\begin{aligned} y(15) &= 20 + 70(1.071)^{-15} \\ &= 45.02 \text{ } ^\circ \text{C} \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} y(30) &= 20 + 70(1.071)^{-30} \\ &= 28.942 \text{ } ^\circ \text{C} \end{aligned}$$

(b)

(c) أقل منهما

(26) أشجار:

$$d = 1.3h^{1.5}$$

حل كل معادلة أسية مما يأتي:

(27)

$$2^{-4x-1} = 8^{2x+1} = 2^{3(2x+1)}$$

$$\therefore -4x - 1 = 6x + 3$$

$$\therefore 10x = -4$$

$$\therefore x = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

(28)

$$5^{-x+5} = 25^{3x+2} = 5^{2(3x+2)}$$

$$\therefore -x + 5 = 6x + 4$$

$$\therefore 7x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{7}$$

(29)

$$216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$$

$$\therefore 6^3 = 6^{-x-3}$$

$$\therefore 3 = -x - 3$$

$$\therefore x = -6$$

(30)

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{3(3x+4)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2(-2x+4)}$$

$$\therefore 9x + 12 = -4x + 8$$

$$\therefore 13x = -4$$

$$\therefore x = -\frac{4}{13}$$

(31)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3(x-4)}$$

$$\therefore 5x + 1 = -3x + 12$$

$$\therefore 8x = 11$$

$$\therefore x = \frac{11}{8}$$

(32)

$$\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{9}\right)^{2(2x+1)} = \left(\frac{5}{9}\right)^{-3(-3x+1)}$$

$$\therefore 4x + 2 = 9x - 3$$

$$\therefore 5x = 5$$

$$\therefore x = 1$$

(33) سكان:

$$y = 2.556(1.0187)^x \quad (a)$$

(b) تقريباً 6.455 مليار

(c) التقدير أكبر من العدد الحقيقي للسكان بمقدار 375 مليون.

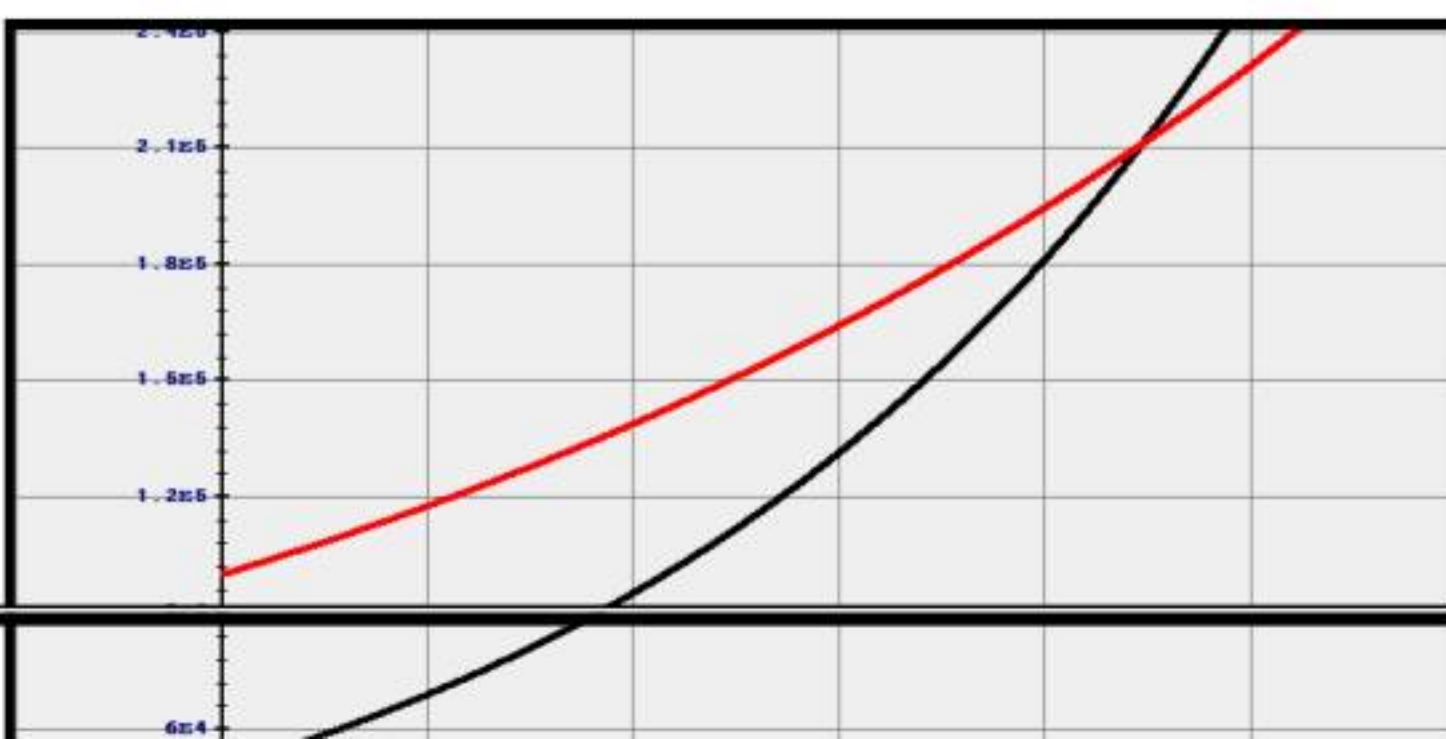
(b) تقريباً 9.3498 مليار وبما أن التنبؤ بعدد السكان عام 2000 كان أكبر من العدد الحقيقي، فقد يكون هذا التنبؤ أكبر مما يكون عليه في الواقع في ذلك الوقت.

(34) ثقافة مالية:

$$A = 50000 \left(\frac{4.065}{4} \right)^{4t} \quad (a)$$

$$B = 50000 \left[(1.0035)^{12t} + (1.0004423)^{52t} \right]$$

(b)



(c) خلال أول 22 سنة يكون الخيار الثاني أفضل؛ لأن المبلغ المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخيار الأول.

(35) تمثيلات متعددة:

(a) حسباً: بعد القص الأول 2 ، بعد القص الثاني 4 ، بعد القص الثالث 8 ، بعد القص الرابع 16

(b) جدولياً:

عدد القص	1	2	3	4
عدد القطع	2	4	8	16

(c) رمزياً: $y = 2^x$

(d) تحليلياً: $y = 0.003(2)^x$

(e) تحليلياً: 3221225.47 in

مسائل مهارات التفكير العليا:

(36) تحد:

$$16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$$

$$\therefore 4(16^{18}) = 4(4^{2(18)}) = 4^{37} = 4^x$$

$$\therefore x = 37$$

(37) مسألة مفتوحة:

$$4^x = 16$$

(38)

$$27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{3(2x)} \cdot 3^{4(x+1)}$$

$$= 3^{6x} \cdot 3^{4x+4} = 3^{10x+4}$$

$$3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1} = 3^{2x+2} \cdot 3^{2(4x+1)}$$

$$= 3^{2x+2} \cdot 3^{8x+2} = 3^{10x+4}$$

B الطرفان متساويان، وهو المطلوب إثباته.

(39) تبرير:

(a) صحيحة دائماً، لأن 2^x موجبة لجميع قيم x ، بينما $-(8)^{20x}$ سالبة لجميع قيم x .

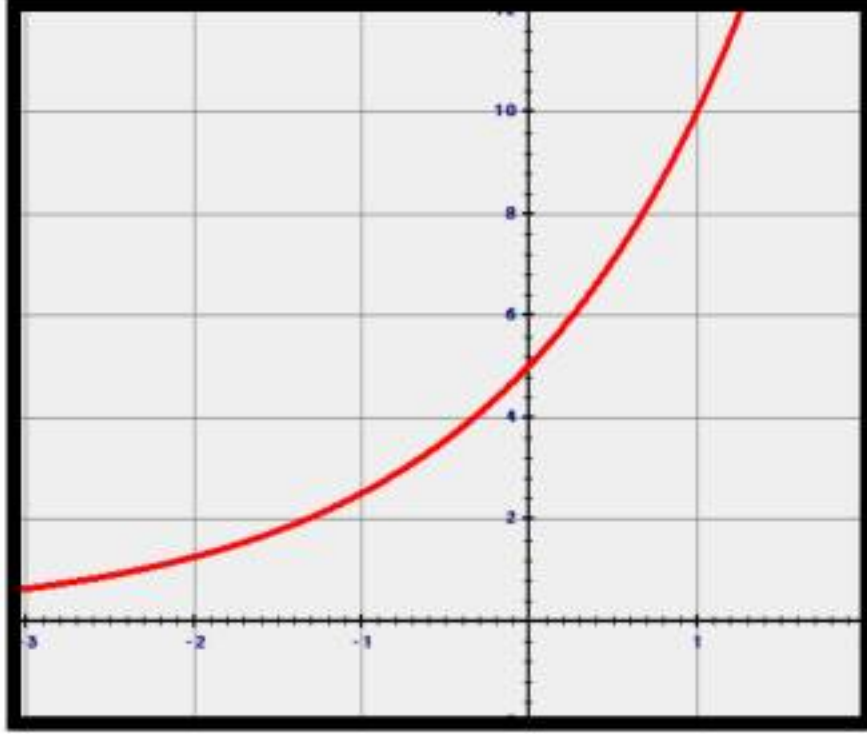
مراجعة تراكمية

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

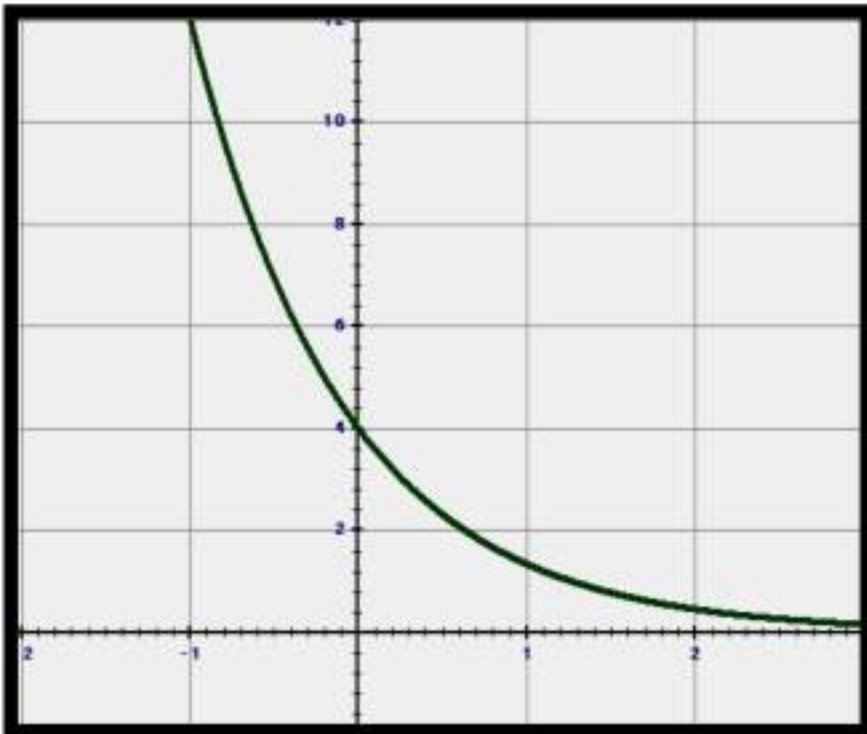
(40)



(41)



(42)



حل كل معادلة مما يأتي:

(43)

$$\sqrt{x+5}=3$$

$$\therefore x+5=9$$

$$\therefore x=4$$

(44)

$$\sqrt{3x-5}=7$$

$$\therefore 3x-5=49$$

$$\therefore 3x=54$$

$$\therefore x=18$$

(45)

$$2x-1=2^4=16$$

$$\therefore 2x=17$$

$$\therefore x=\frac{17}{2}$$

(46)

$$(5x+7)^{\frac{1}{5}}=2$$

$$\therefore 5x+7=2^5=32$$

$$\therefore 5x=25$$

$$\therefore x=5$$

(47)

$$3x - 2 = (-1)^5 = -1$$

$$\therefore 3x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}$$

(48)

$$7x - 1 = (-2)^3 = -8$$

$$\therefore 7x = -7$$

$$\therefore x = -1$$

أوجد $[g \circ h](x)$ ، $[h \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

(49)

$$[g \circ h](x) = 6x + 1$$

$$[h \circ g](x) = -6x + 7$$

(50)

$$[g \circ h](x) = x + 4$$

$$[h \circ g](x) = |x| + 4$$

أوجد كل دالة مما يأتي:

(51)

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

تدرب على اختبار

(52)

1 ←←← (C

(53)

– 25 ←←← (A

(2-3) اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تحقق من فهمك ■

(1A)

$$16 = 4^2$$

(1B)

$$729 = 3^6$$

■ تحقق من فهمك:

(2A)

$$\log_4 64 = 3$$

(2B)

$$\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$$

■ تحقق من فهمك:

(3A)

$$\log_3 81 = 4$$

(3B)

$$\log_{\frac{1}{2}} 256 = -8$$

■ تحقق من فهمك:

(4A)

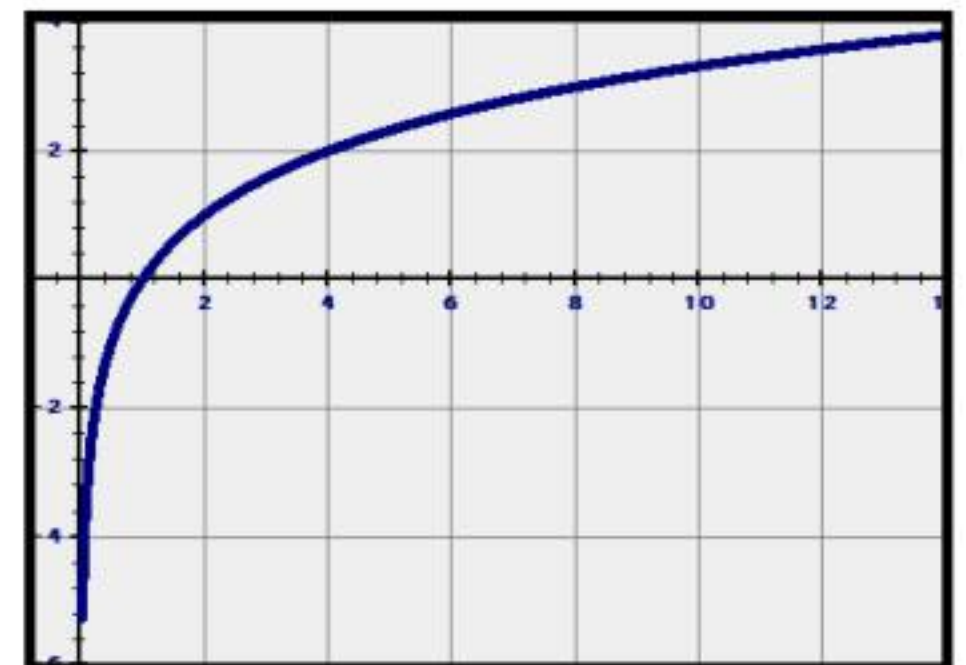
$$\log_9 81 = 2$$

(4B)

$$3^{\log_3 1} = 1$$

■ تحقق من فهمك:

(5A)

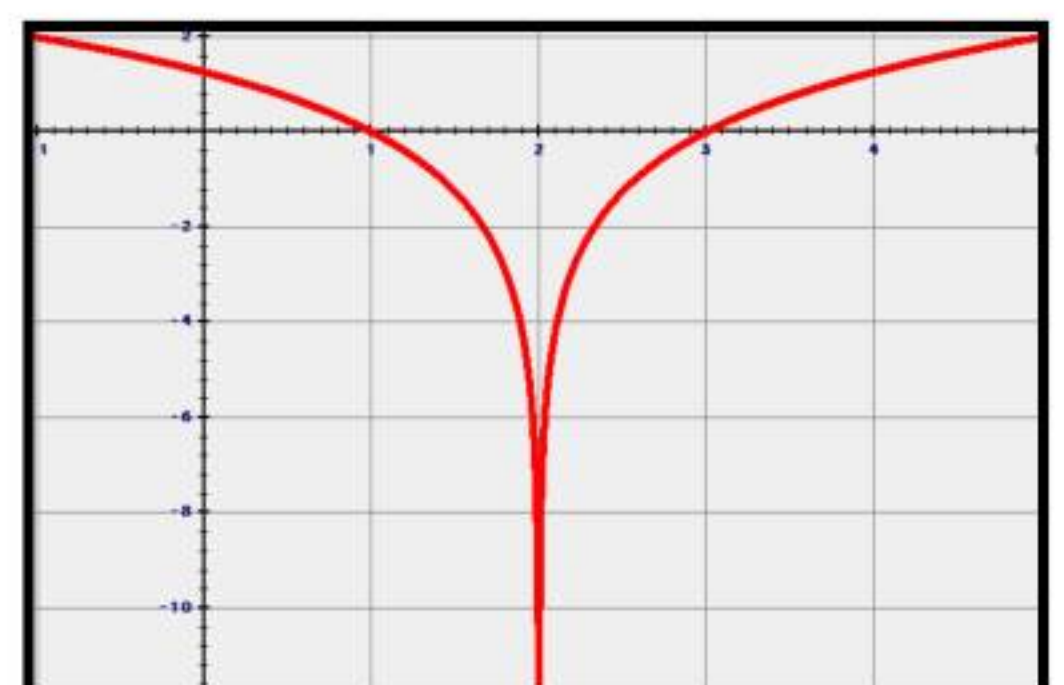


(5B)

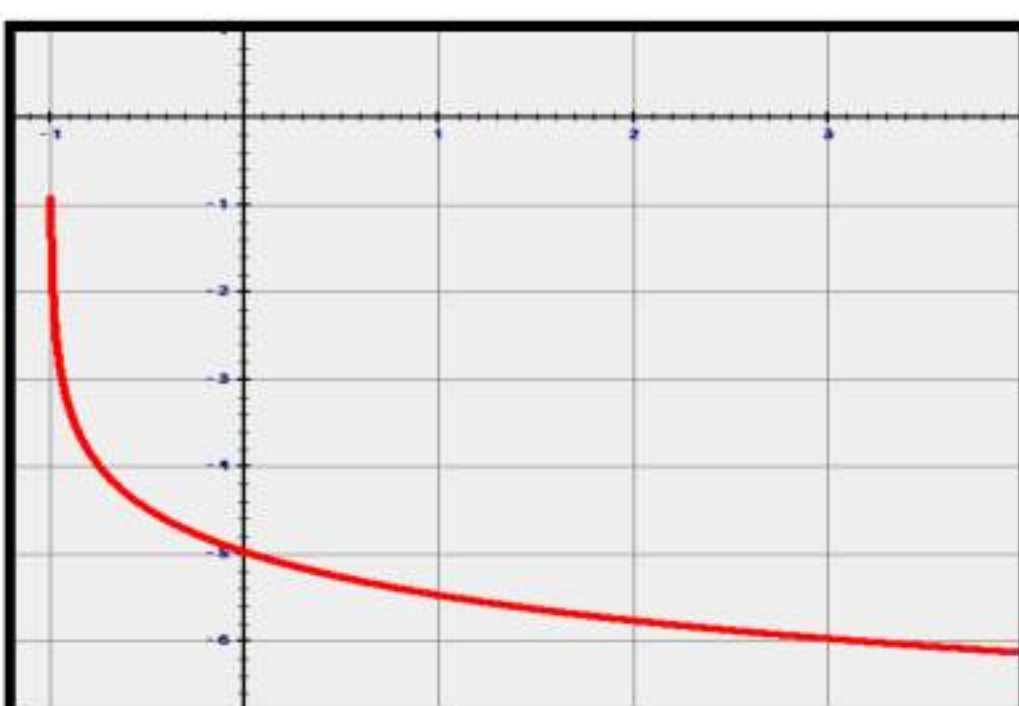


■ تحقق من فهمك:

(6A)



(6B)



■ تحقق من فهمك:

(7)

$$y = \log_{0.5} x$$

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

(1)

$$512 = 8^3$$

(2)

$$625 = 5^4$$

(3)

$$16 = 2^4$$

(4)

$$343 = 7^3$$

(5)

$$9^{-2} = \frac{1}{81}$$

(6)

$$3^{-3} = \frac{1}{27}$$

(7)

$$12^2 = 144$$

(8)

$$9^0 = 1$$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

(9)

$$\log_{11} 1331 = 3$$

(10)

$$\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$$

(11)

$$\log_9 \frac{1}{9} = -1$$

(12)

$$\log_6 \frac{1}{216} = -3$$

(13)

$$\log_2 256 = 8$$

(14)

$$\log_4 4069 = 6$$

(15)

$$\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$$

(16)

$$\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

(17)

$$\log_{13} 169 = 2$$

(18)

$$\log_2 \frac{1}{128} = -7$$

(19)

$$\log_6 1 = 0$$

(20)

$$\log_4 1 = 0$$

(21)

$$\log_{10} 10 = 1$$

(22)

$$\log_{10} 0.01 = -2$$

(23)

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2$$

(24)

$$\log_4 \frac{1}{64} = -3$$

(25)

$$\log_6 216 = 3$$

(26)

$$\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$$

(27)

$$\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$$

(28)

$$\log_{121} 11 = \frac{1}{2}$$

(29)

$$\log_{\frac{1}{5}} 3125 = -5$$

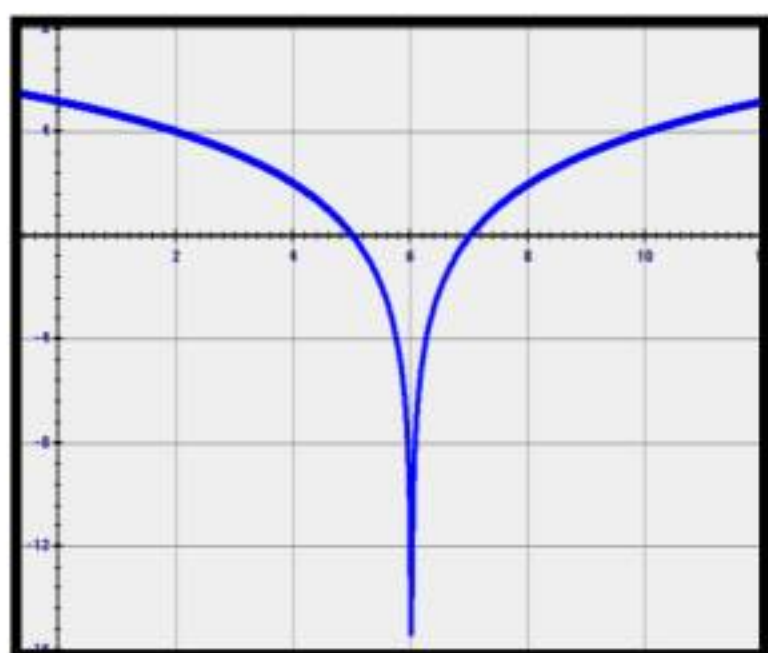
(30)

$$\log_{\frac{1}{8}} 512 = -3$$

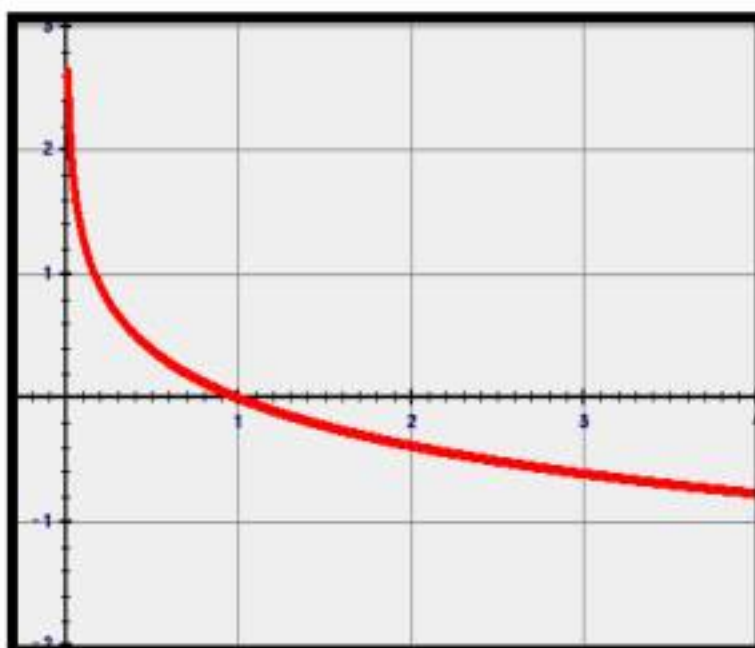
(31)

$$\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216} = 3$$

(34)



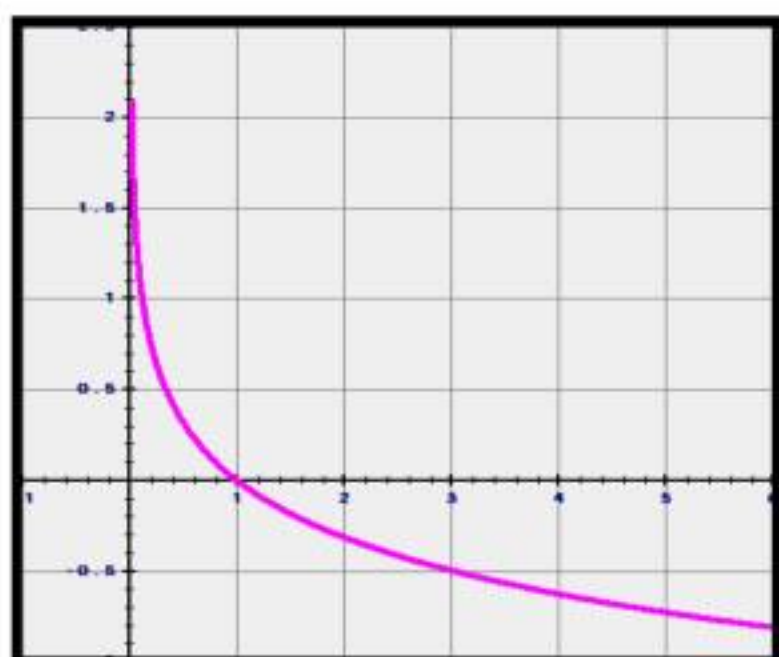
(33)



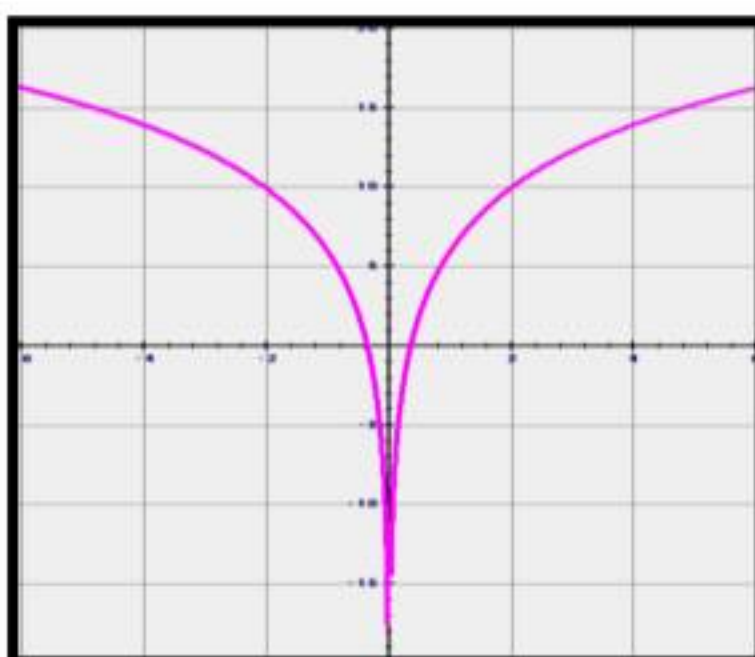
(32)



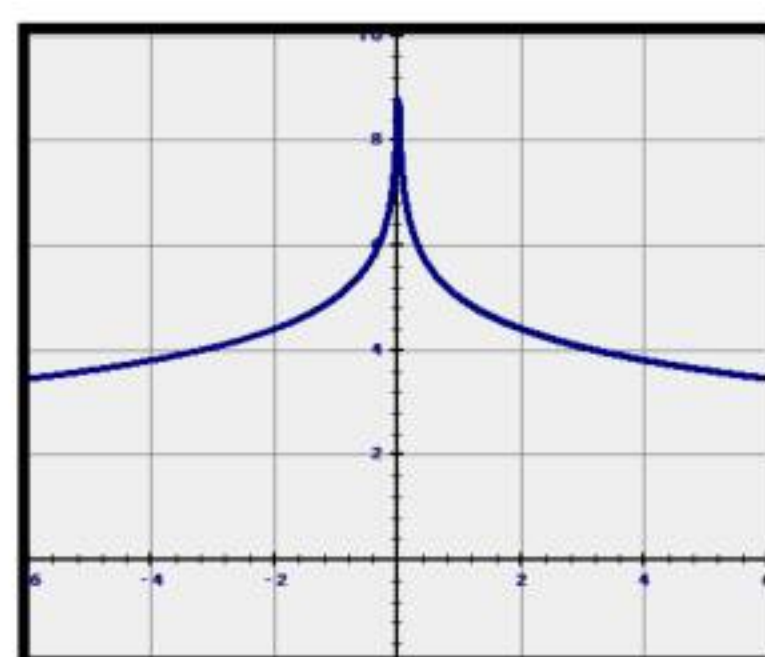
(37)



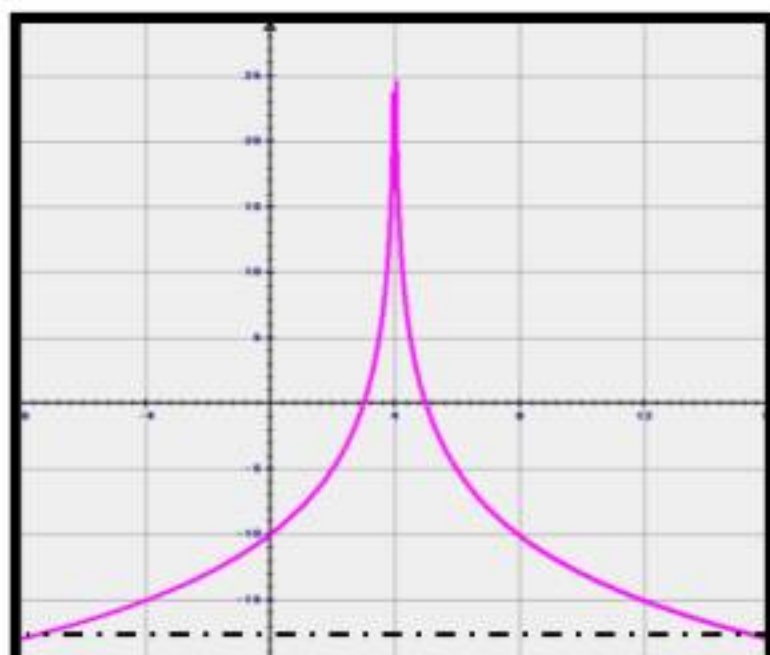
(36)



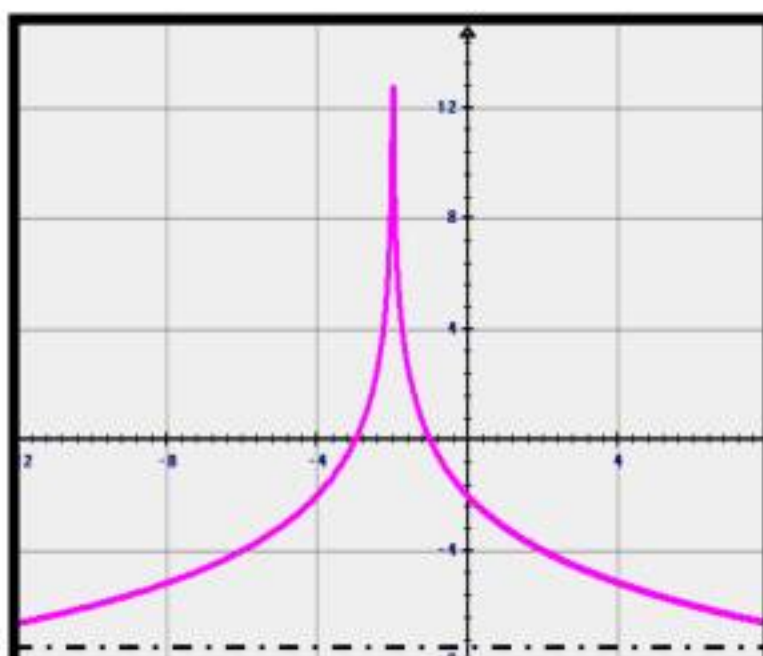
(35)



(40)



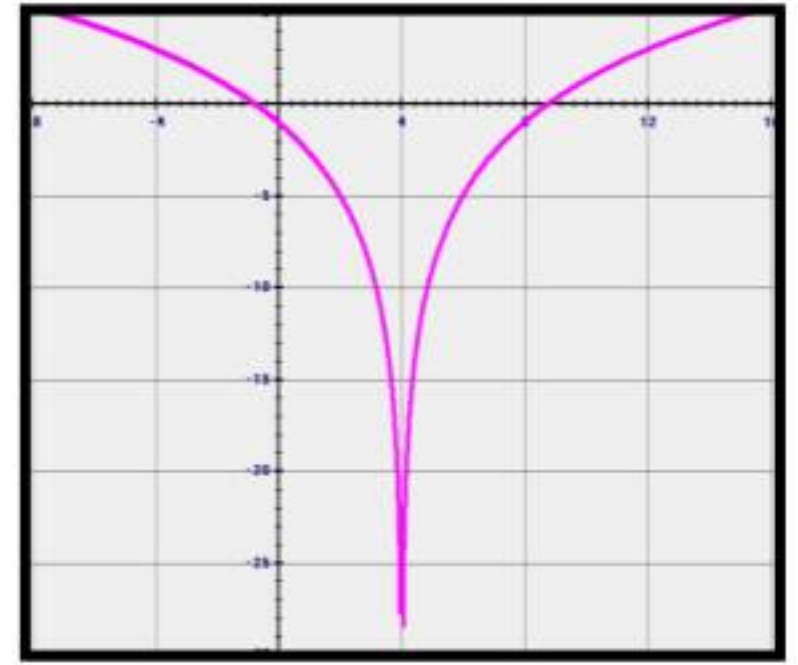
(39)



(38)



(41)

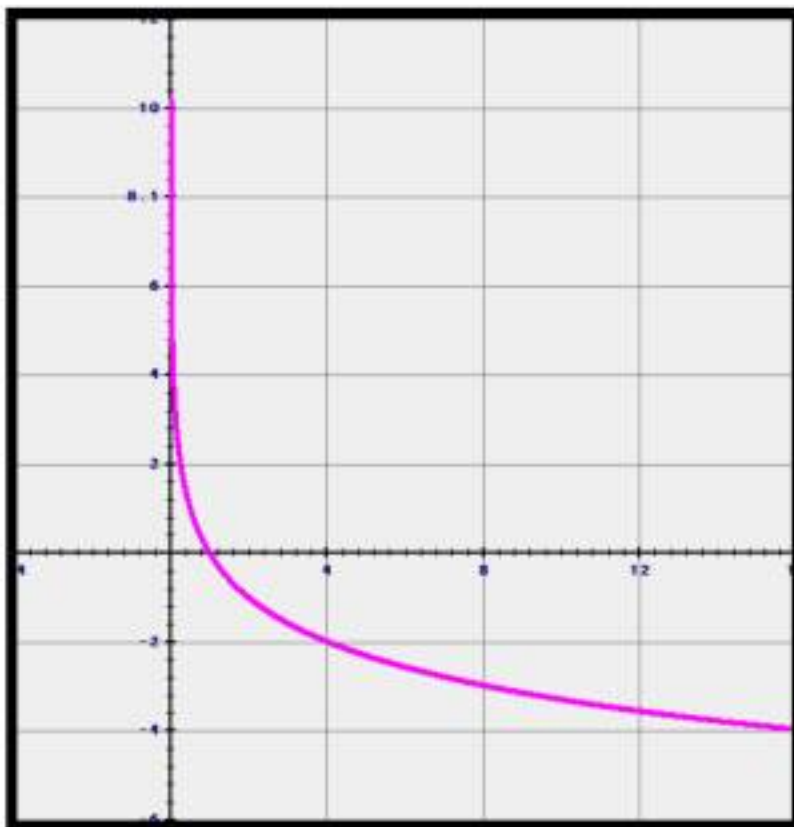


$$R = 10^{ps}$$

(43) تصوير:

$$n = \log_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{4}} \right) = \log_2 4 = 2 \quad (a)$$

(b)



(c) $\frac{1}{8}$ ، نقصان الإضاءة.

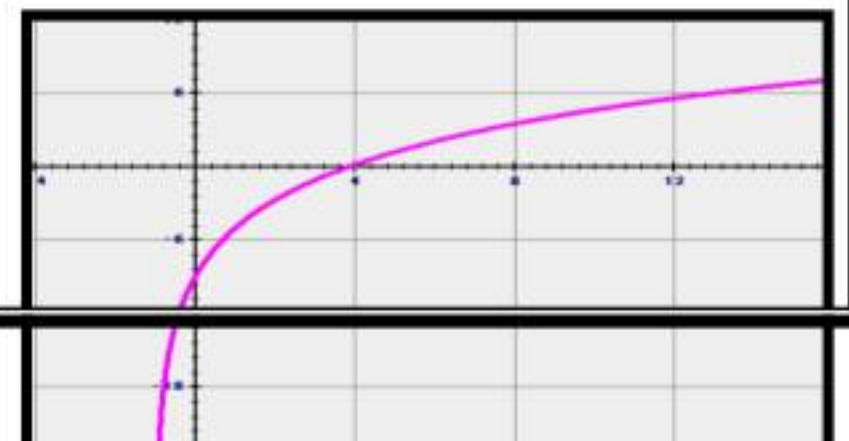
(44) تربية:

$$y(0) = 85 - 6 \log_2 1 = 85 - 0 = 85 \quad (a)$$

$$y(3) = 85 - 6(\log_2 4) = 85 - 12 = 73 \quad (b)$$

$$y(15) = 85 - 6 \log_2 16 = 85 - 24 = 61 \quad (c)$$

(45)



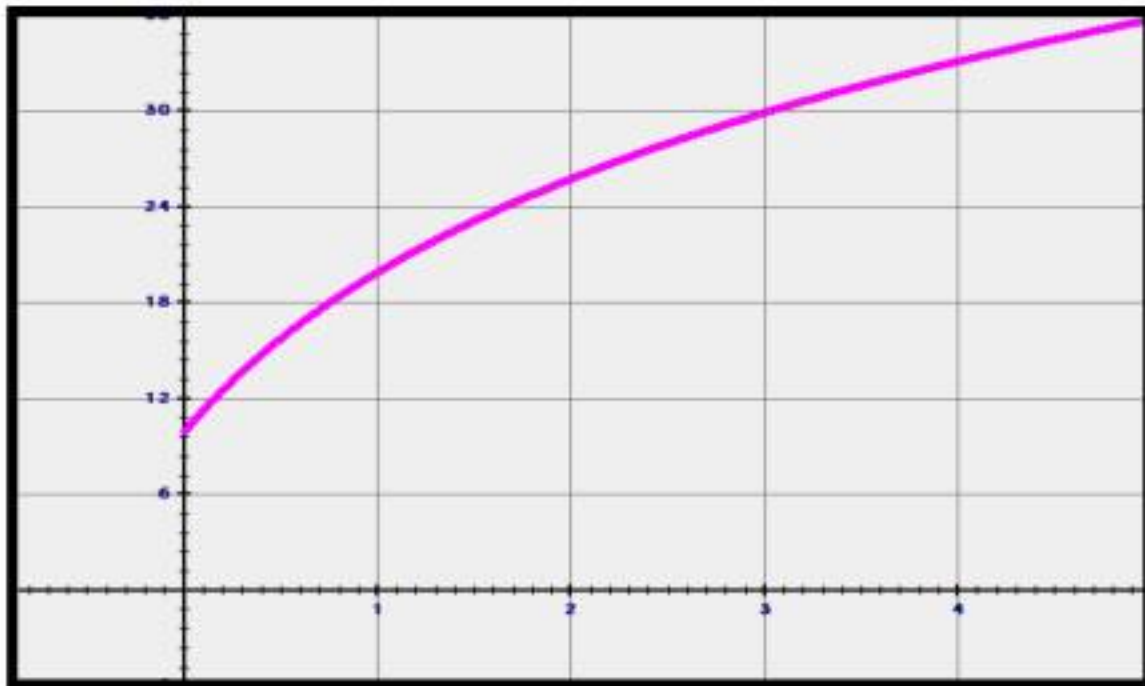
(46) تحليليا:

$$y = \log_3(x - 4) + 1$$

(47)

$$S(3) = 30, S(15) = 50, S(63) = 70 \quad (a)$$

(b) إذا أنفق 3000 ريال على الدعاية والإعلان ستكون مبيعات الشركة 30000 ريال وإذا أنفق 15000 ريال ستكون مبيعات الشركة 50000 ريال وإذا أنفق 63000 ريال على الدعاية والإعلان ستكون مبيعات الشركة 70000 ريال



(c)

(d) يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زاد المبلغ المنفق على الدعاية والإعلان عن 70000 ريال قبل إنحناء المنحنى ليتساوى المبلغ المنفق على الدعاية والإعلان مع قيمة المبيعات.

(48) أحياء:

$$G = \frac{t}{3.3 \log_b f} = \frac{16}{3.3 \log_4 1024} = 264 \text{ h} \quad (a)$$

$$G = \frac{t}{3.3 \log_b f} = \frac{t}{3.3 \log_{20} 160000} = 5 \quad (b)$$

$$\therefore t = 66 \text{ h}$$

$$G = \frac{t}{3.3 \log_b f} = \frac{4.4}{3.3 \log_6 1296} = \frac{1}{3} h \quad (c)$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

(49) اكتشف الخطأ:

$\log_2 16 = 4$ أما باقي العبارات تساوي 2

(50) تحد:

لا ينتمي أبداً، لأنه إذا إنتمى الصفر للمجال ستصبح المعادلة $y = \log_b 0$ وبهذا يكون $b^y = 0$ وهذا غير صحيح.

(51) أكتشف الخطأ:

سليمان، لأن التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية يمر بالنقطة $(1, 0)$ ولا يمر بالنقطة $(0, 1)$.

(52) أكتشف الخطأ:

لا، مريم كانت الأقرب للحل الصحيح لكن كان عليها إكمال الحل $-y = 2$ بدلاً من $y = 2$ ، أما مها فاستعملت تعريف اللوغاريتمات بشكل خاطئ.

(53) تبرير:

$\log_7$ ، قيمته أكبر قليلاً من 2 وقيمة $\log_8 61$ أقل من 2 بقليل أيضاً وقيمة $\log_9 71$ أقل من 2 بقليل.

(54) مسألة مفتوحة:

$$\log_2 33554432 = 25 \quad (a)$$

$$\log_4 \frac{1}{64} = -3 \quad (b)$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \quad (c)$$

$$\log_7 1 = 0 \quad (d)$$

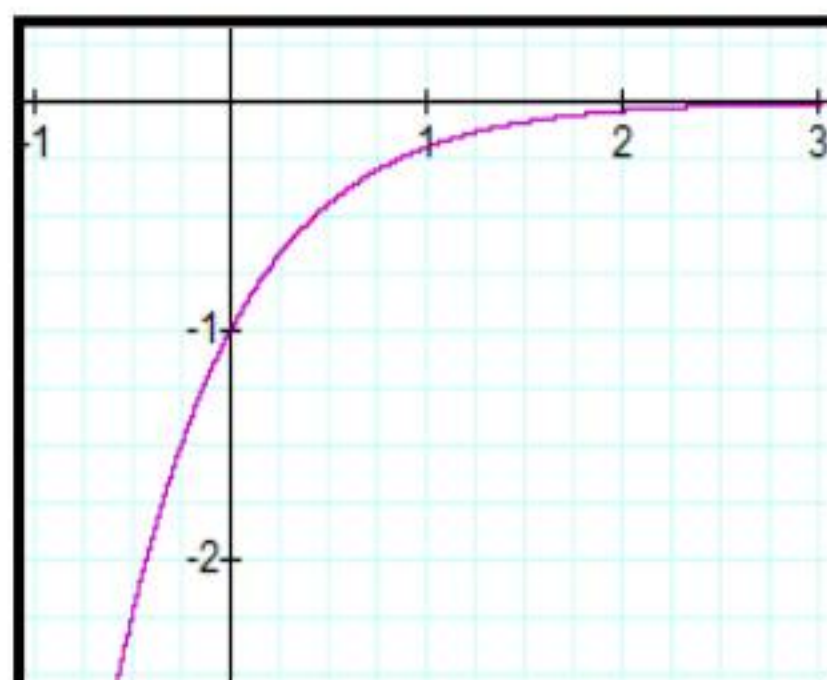
(55) اكتب:

في الدالة $g(x) = a \log_{10}(x - h) + k$ قيمة k هي أزاحة رأسية عدد k وحده إلى الأعلى إذا كانت k موجبة وعدد k وحده إلى الأسفل إذا كانت k سالبة بينما قيمة h هي أزاحة أفقية عدد h وحده إلى اليمين إذا كانت h موجبة وعدد h وحده إلى اليسار إذا كانت h سالبة.

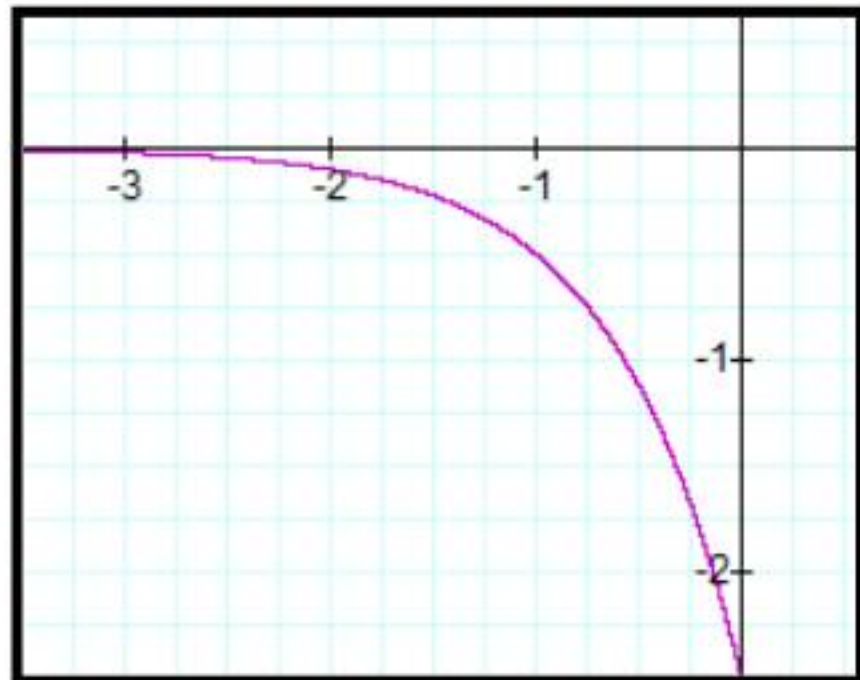
مراجعة تراكمية:

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

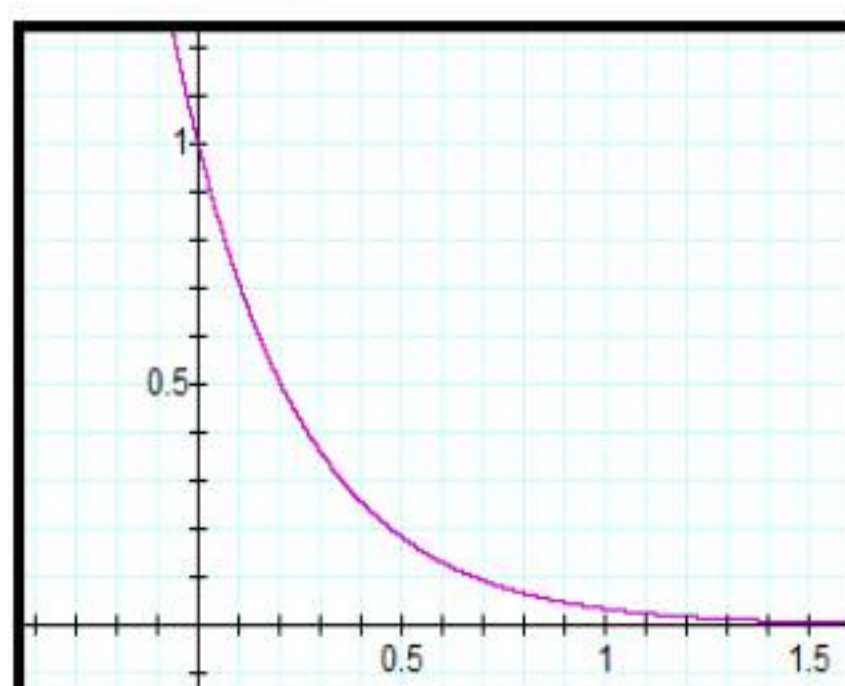
(56)



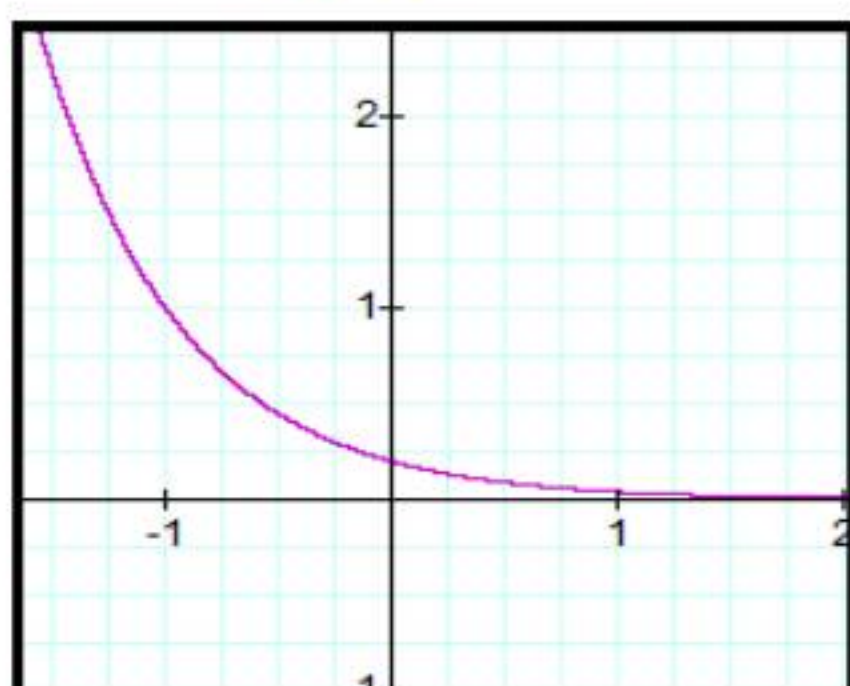
(57)



(58)



(59)



حل كل متباينة مما يأتي:

$$3^{n-2} > 3^3 \quad (60)$$

$$n - 2 > 3$$

$$n > 5$$

$$2^{2n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad (61)$$

$$2n \leq -4$$

$$n \leq -2$$

$$2^{4n} < 2^{3(n+1)} \quad (62)$$

$$4n < 3n + 3$$

$$n < 3$$

$$2^{5(5P+2)} \geq 2^{4(5P)} \quad (63)$$

$$25P + 10 \geq 20P$$

$$5P \geq -10$$

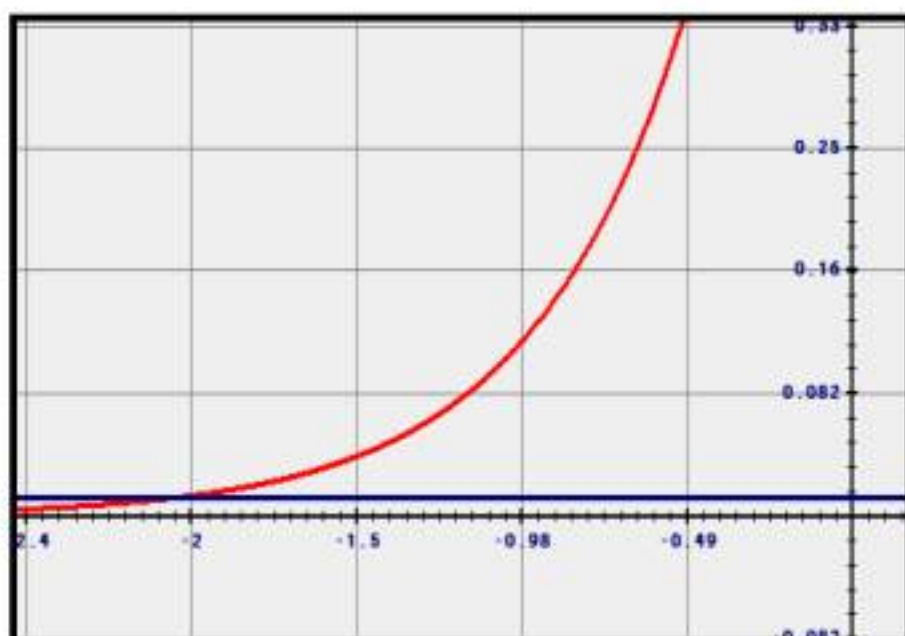
$$P \geq -2$$

$$4^x \times 4^2 = 48 \quad (64)$$

$$4^x = \frac{48}{16}$$

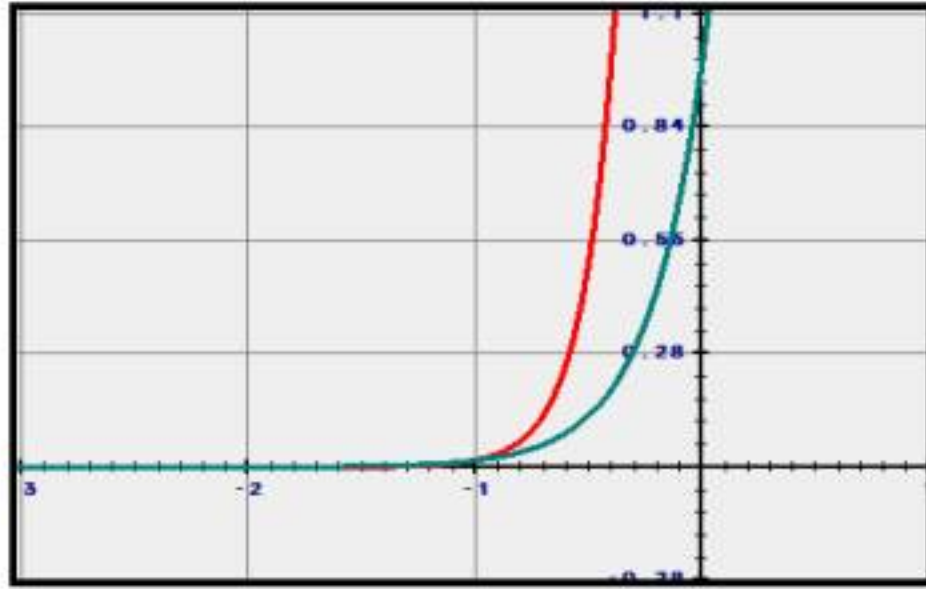
$$4^x = 3$$

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:



$$9^x = 9^{-2} \quad (65)$$

$$x = -2$$

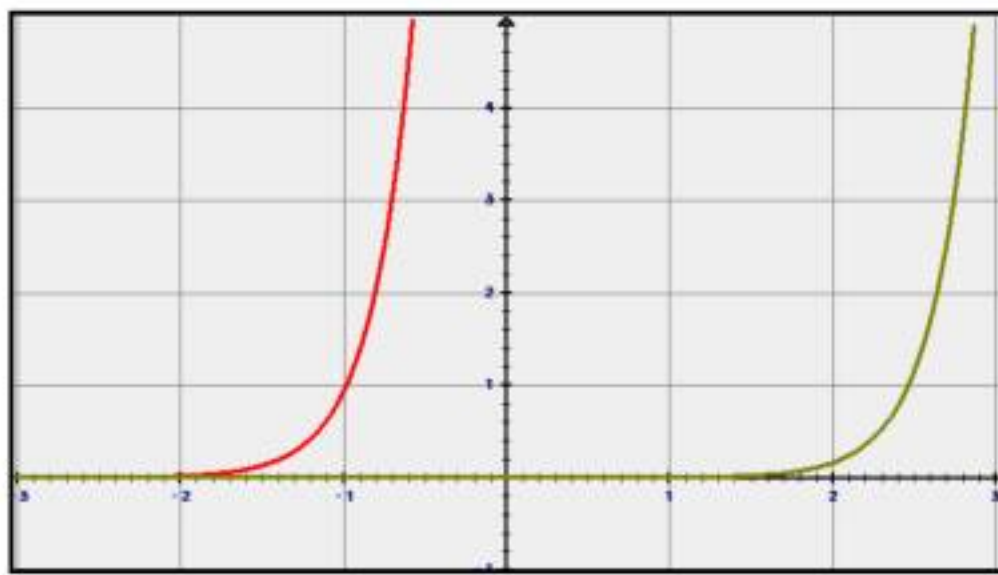


$$2^{6x} = 2^{2(5x+2)} \quad (66)$$

$$6x = 10x + 4$$

$$4x = -4$$

$$x = -1$$

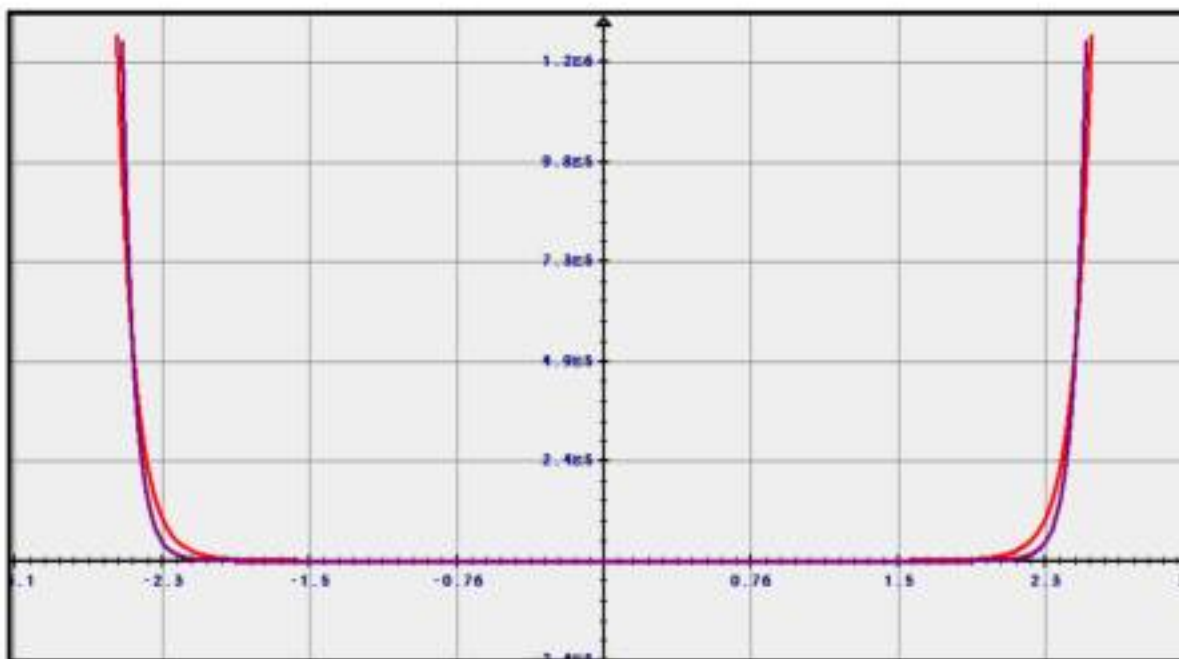


$$7^{2(3P+1)} = 7^{2P-5} \quad (67)$$

$$6P + 2 = 2P - 5$$

$$4P = -7$$

$$x = \frac{-7}{4}$$



$$3^{2x^2} = 3^{3(x^2-2)} \quad (68)$$

$$2x^2 = 3x^2 - 6$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \pm\sqrt{6}$$

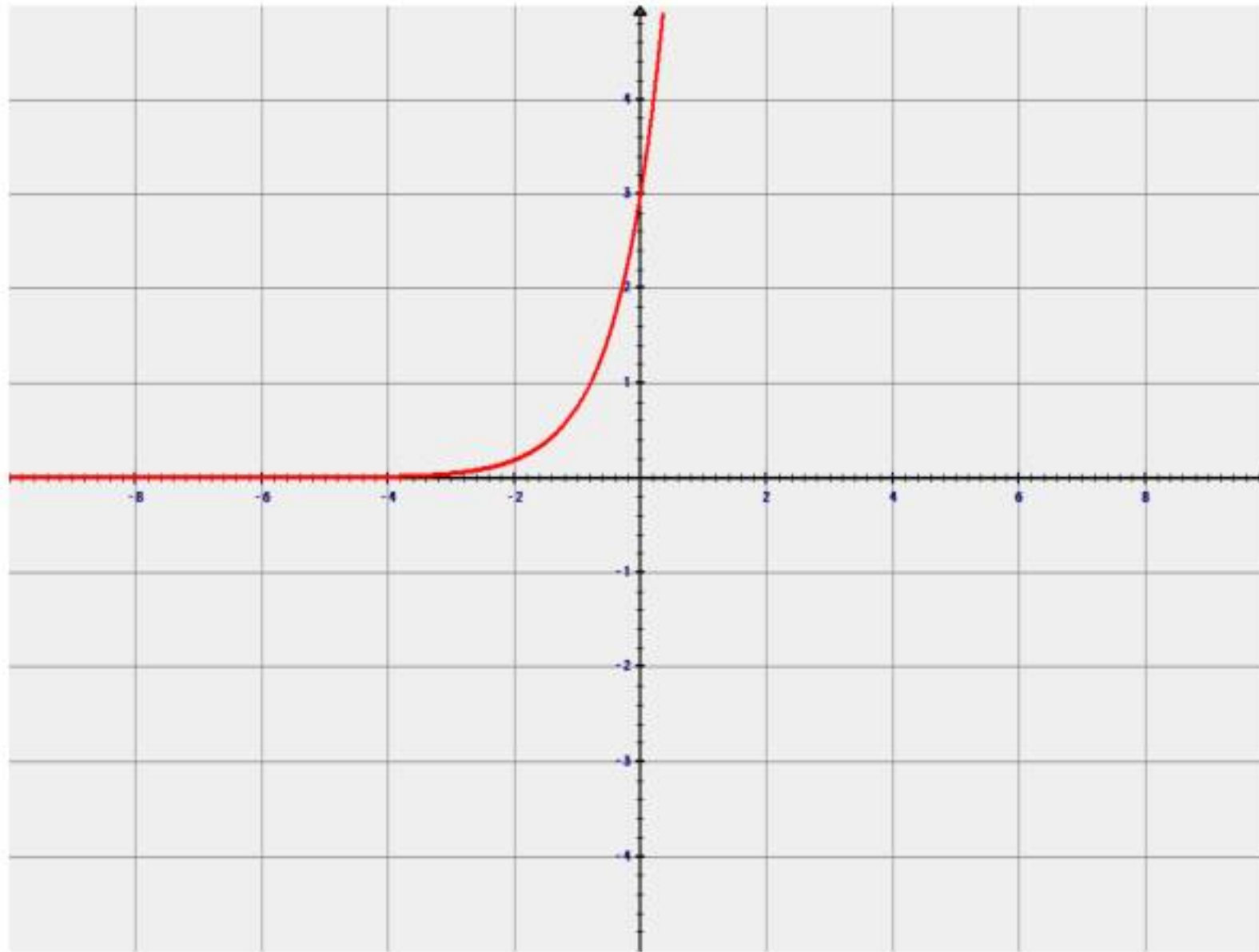
تدرب علی اختبار:

$$\frac{4}{3} C \quad (69)$$

$$-5 D \quad (70)$$

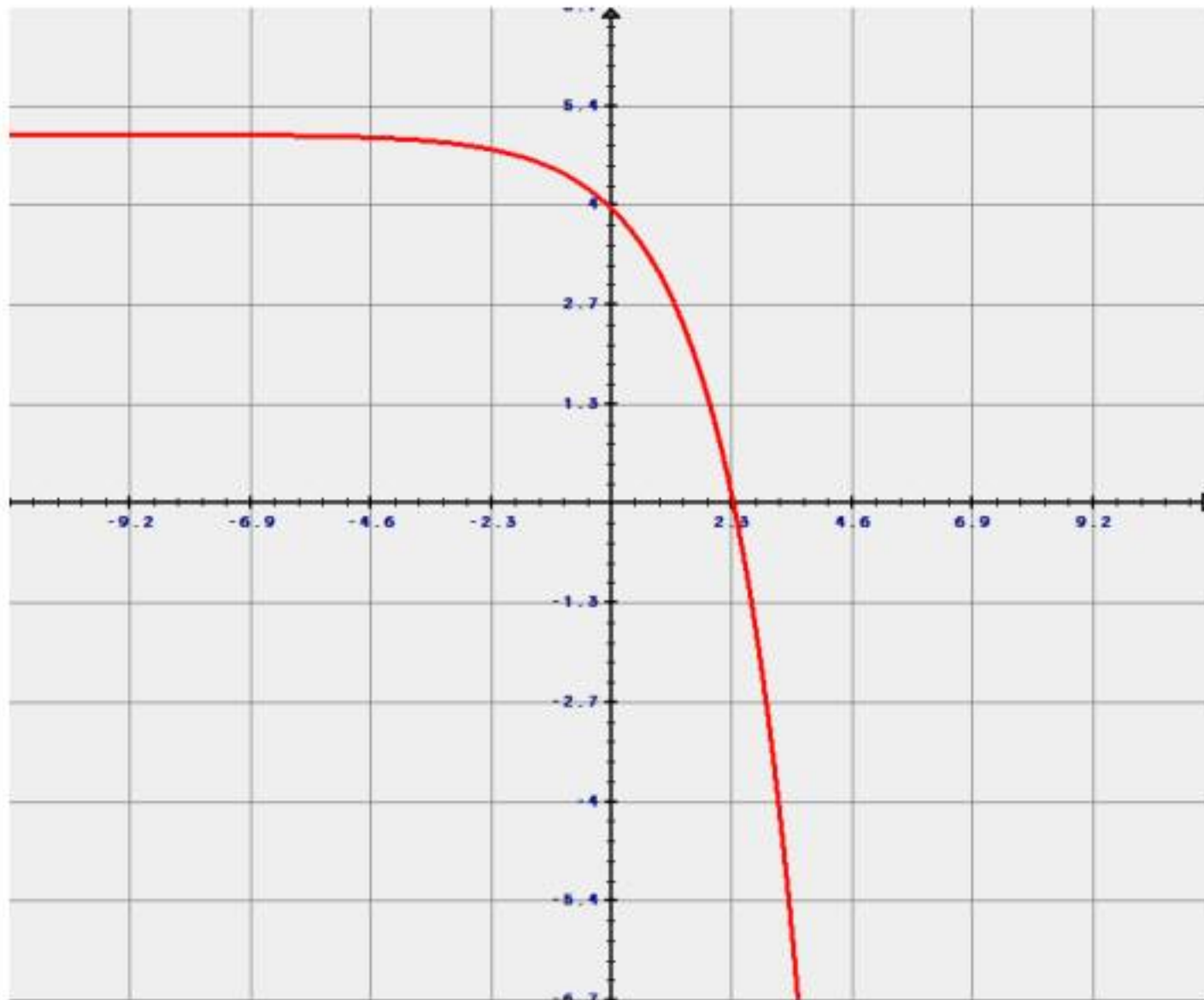
اختبار منتصف الفصل

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:



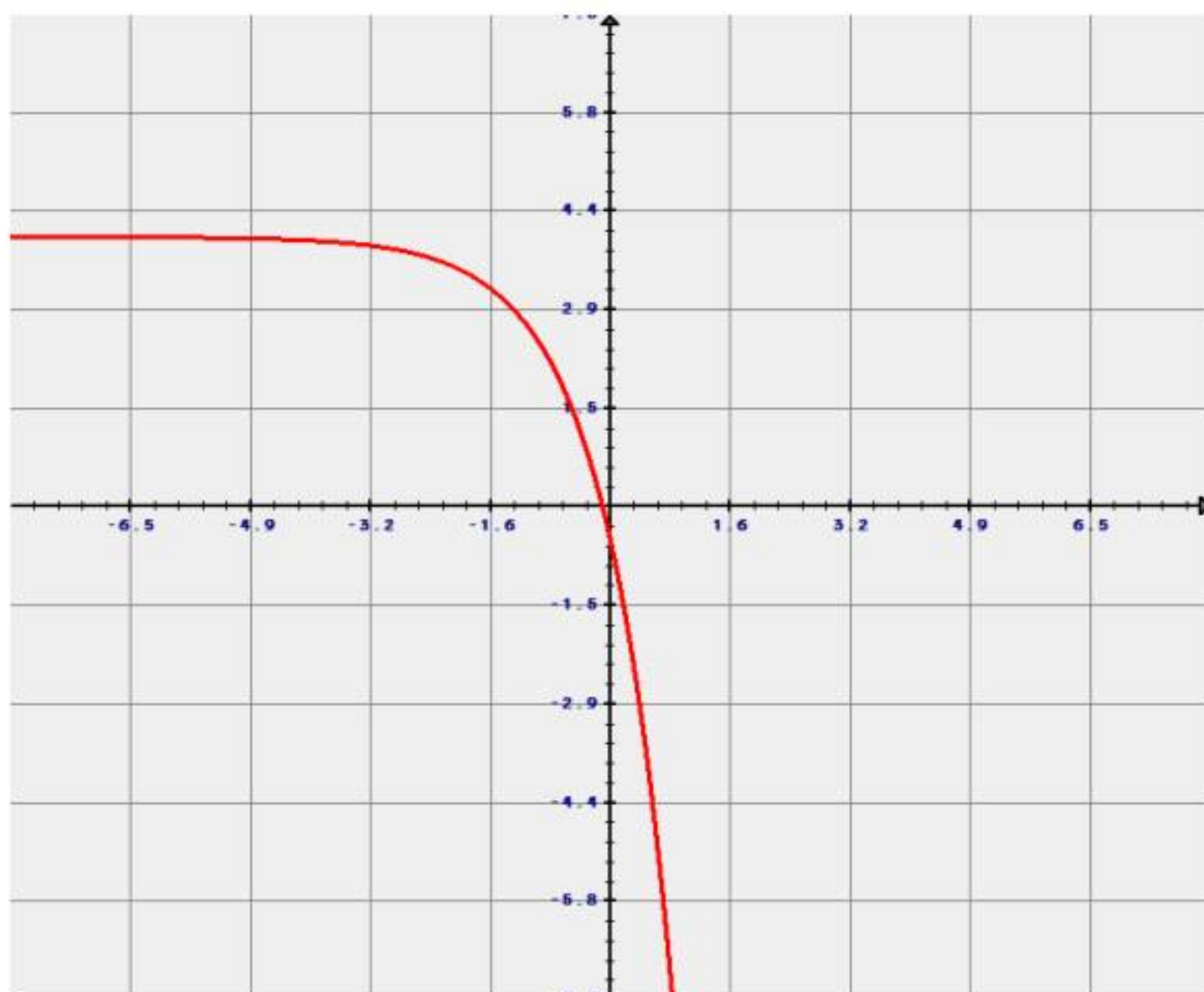
(1) المجال: $\{R\}$

المدى: $\{f(x) | f(x) > 0\}$

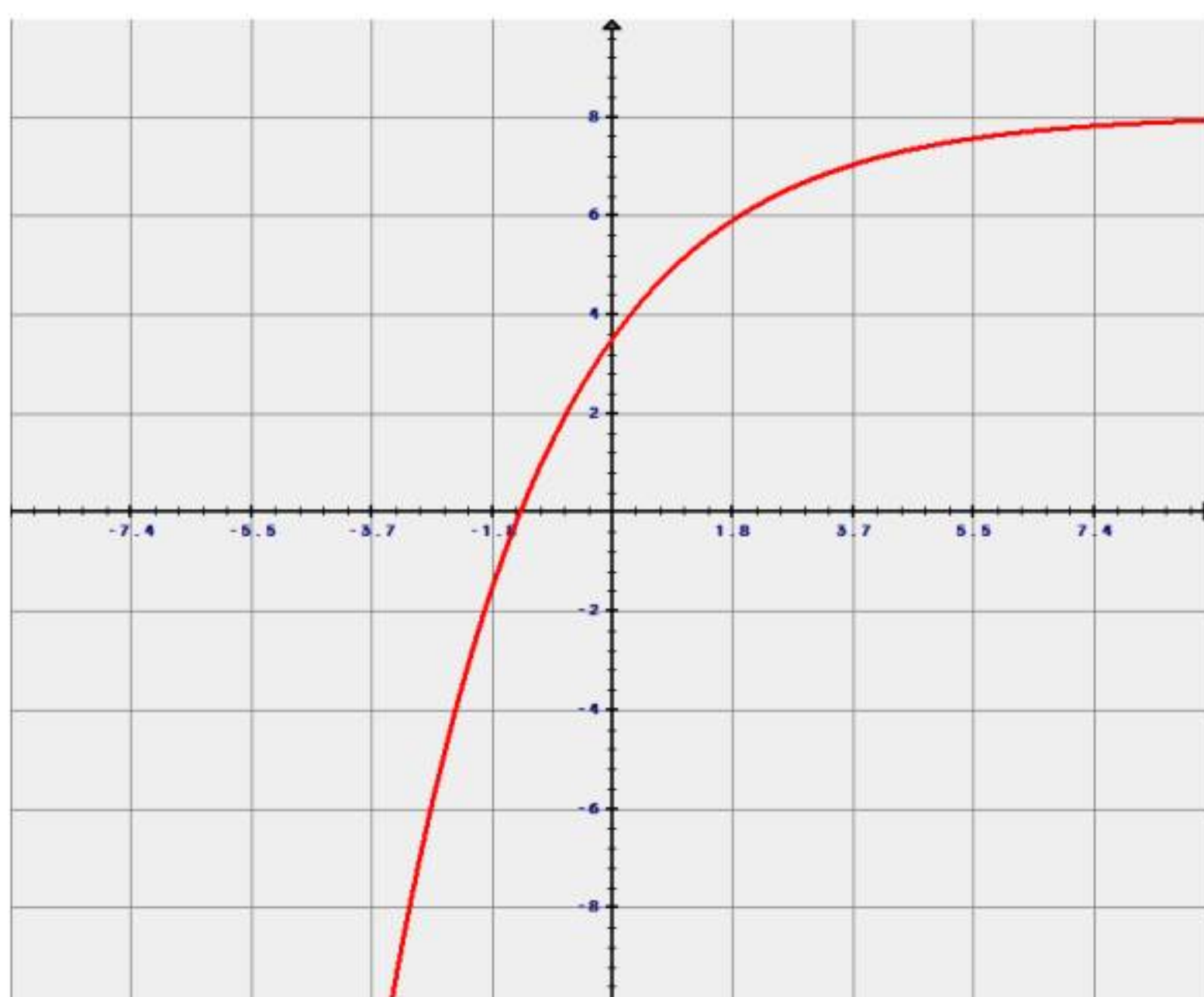


(2) المجال: $\{R\}$

المدى: $\{f(x) | f(x) < 5\}$



(3) المجال: $\{R\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) < 4\}$



(4) المجال: $\{R\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) < 8\}$

(5) علوم:

$$y = 6000(2.16025)^x \quad (a)$$

$$y = 6000(2.16025)^4 = 130667.41 \quad (b)$$

(6) اختيار من متعدد:

$$f(x) = 125(2)^x \quad D$$

(7) سكان:

$$f(x) = 45000(1.0350)^x \quad (a)$$

$$f(x) = 45000(1.0350)^{20} \quad (b)$$

89540.49 تقريباً

حل كلا من المعادلتين الآتيتين:

$$11^{2x+1} = 11^{2(3x)} \quad (8)$$

$$2x + 1 = 6x$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

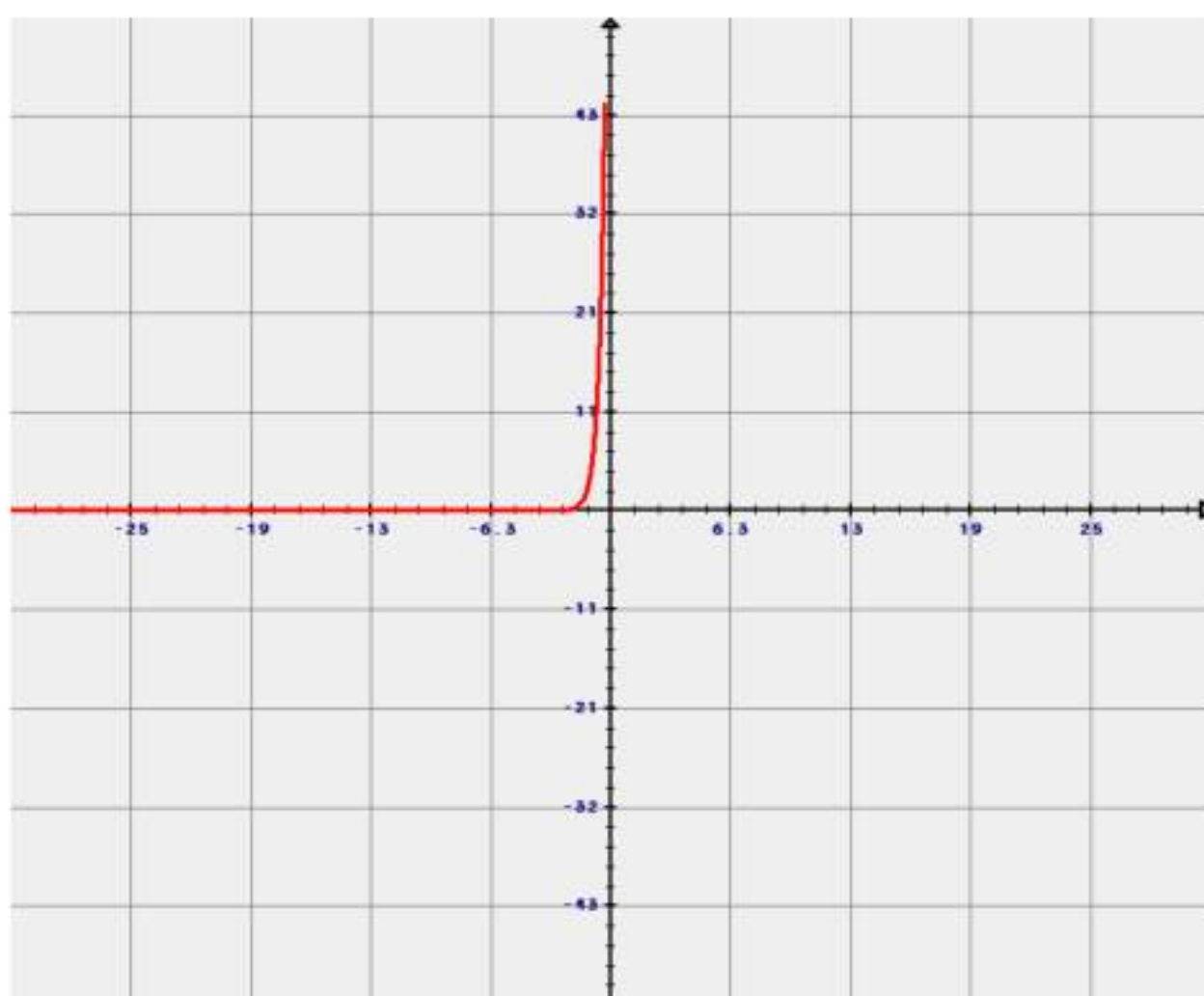
$$3^{4x-7} = 3^{3(2x+3)} \quad (9)$$

$$4x - 7 = 6x + 9$$

$$2x = -16$$

$$x = -8$$

حل كلا من المتباينات الآتية وتحقق من صحة حلك:

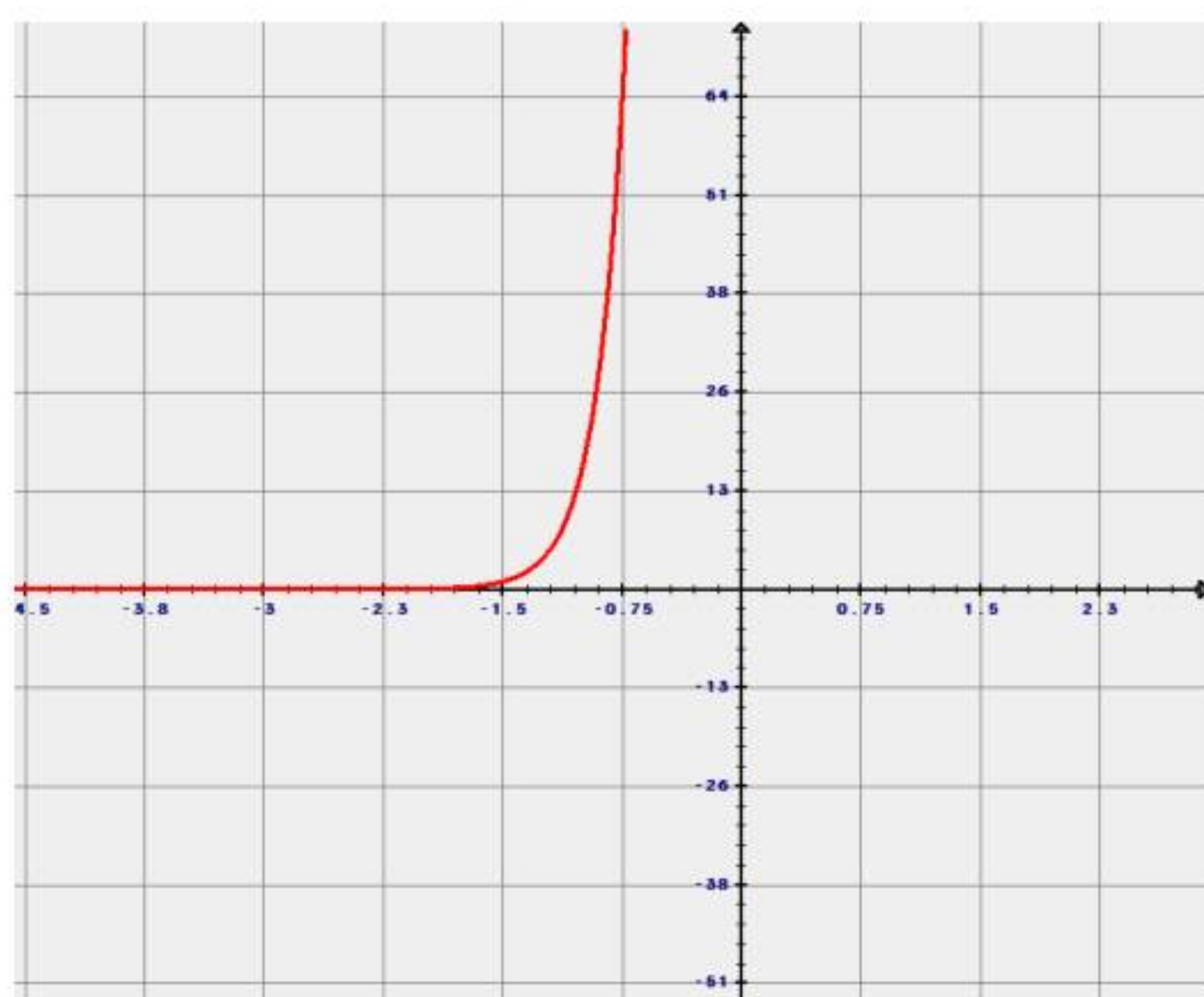


$$5^{2x+3} \leq 5^3 \quad (10)$$

$$2x + 3 \leq 3$$

$$2x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

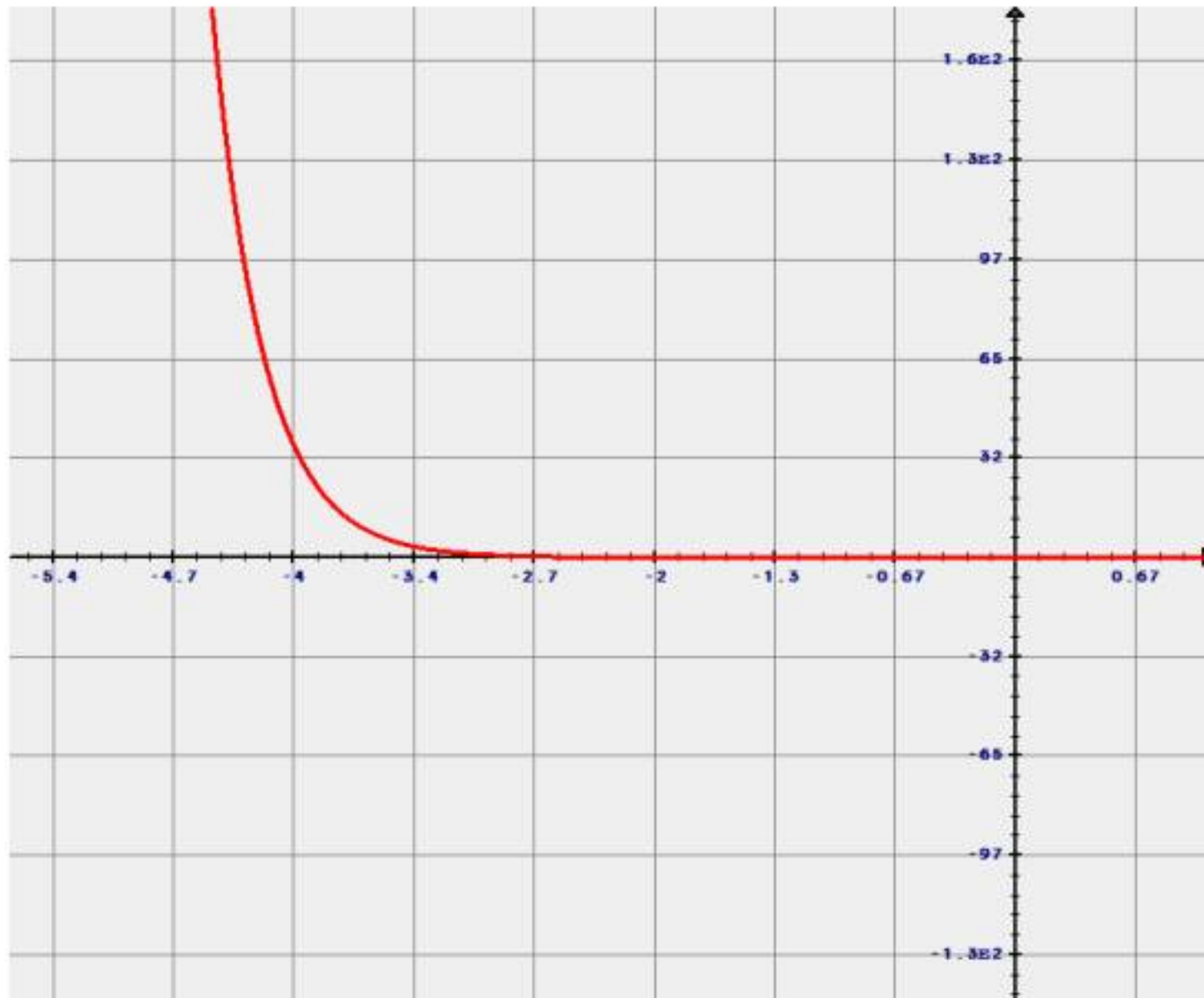


$$4^{2(2x+3)} < 4^3 \quad (11)$$

$$4x + 6 < 3$$

$$4x < -3$$

$$x < -\frac{3}{4}$$



$$2^{-5(2x+3)} \geq 2^{6(3x)} \quad (12)$$

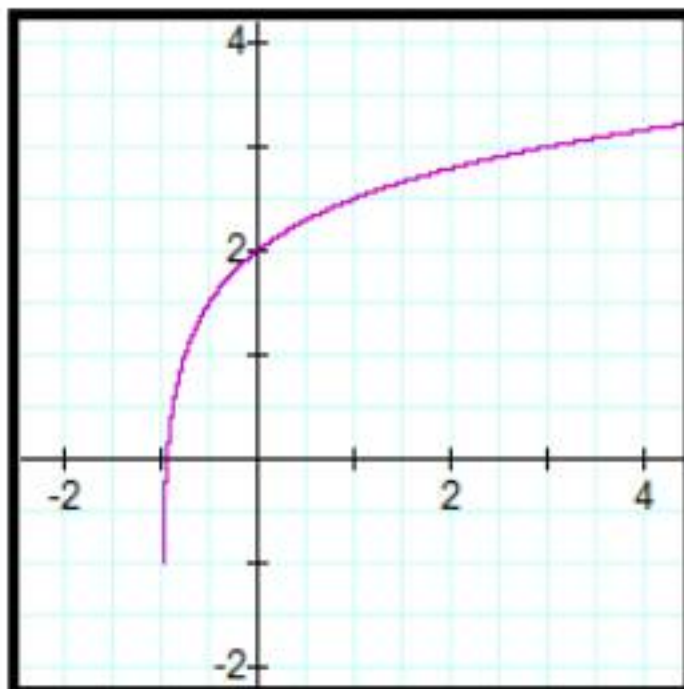
$$-10x - 15 \geq 18x$$

$$-28x \geq 15$$

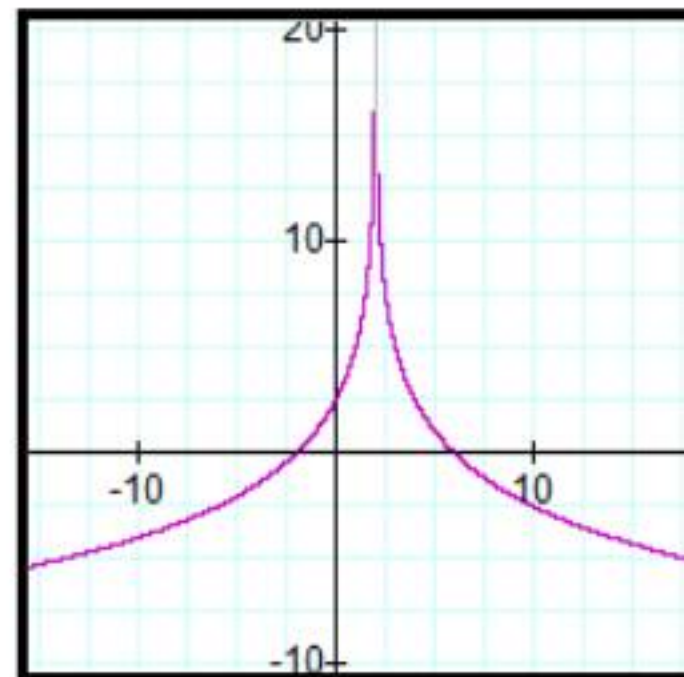
$$x \leq \frac{-15}{28}$$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

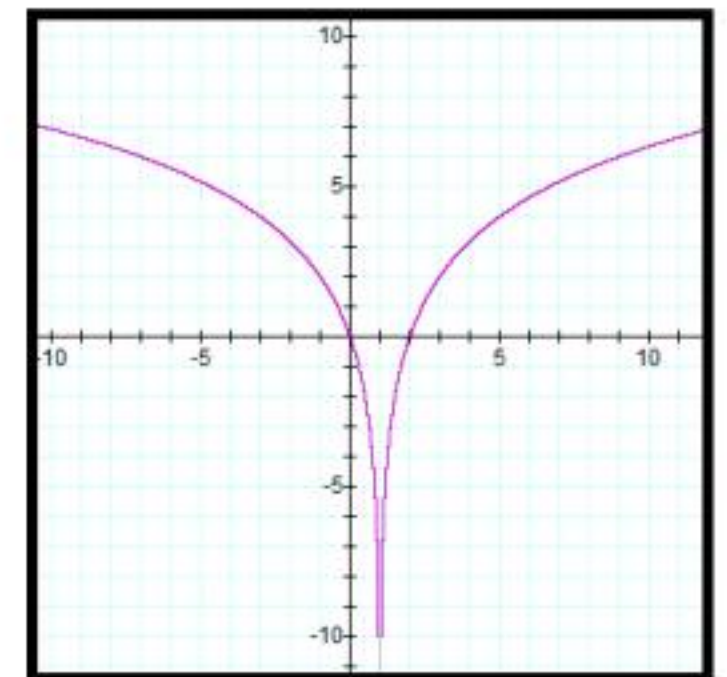
(15)



(14)



(13)



(16) إختيار من متعدد:

$$\text{Log}_{625} 5 = \frac{1}{4} \quad A$$

(17) إختيار من متعدد:

A

أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$\text{Log}_4 32 = \frac{5}{2} \quad (18)$$

$$\text{Log}_5 5^{12} = 12 \quad (19)$$

$$\text{Log}_{16} 4 = \frac{1}{2} \quad (20)$$

$$9^3 = 729 \quad (21)$$

(2-4) خصائص اللوغاريتمات

■ تحقق من فهمك:

(1)

$$\text{Log}_4 32 = \text{Log}_4 2^5 = 2.5$$

■ تحقق من فهمك:

(2)

$$\begin{aligned}\text{Log}_3 4.5 &= \text{Log}_3 \left(\frac{9}{2} \right) \\ &= \text{Log}_3 3^2 - \text{Log}_3 2 \\ &= 2 - 0.6309 \\ &= 1.3690\end{aligned}$$

■ تحقق من فهمك:

(3)

$$\begin{aligned}pH &= \text{Log}_{10} \frac{1}{[H^+]} \\ 2.1 &= \text{Log}_{10} 1 - \text{Log}_{10} H^+ \\ 2.1 &= 0 - \text{Log}_{10} H^+ \\ -2.1 &= \text{Log}_{10} H^+ \\ 10^{-2.1} &= H^+\end{aligned}$$

إذن يوجد $10^{-2.1}$ مول من الهيدروجين في عصير الليمون

■ تحقق من فهمك:

(4)

$$\text{Log}_3 49 = \text{Log}_3 7^2 = 2\text{Log}_3 7 = 2 \times 1.7712 \approx 3.54$$

■ تحقق من فهمك:

(5A)

$$\text{Log}_6 \sqrt[5]{36} = \text{Log}_6 \sqrt[5]{6^2} = \text{Log}_6 6^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \text{Log}_6 6 = \frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$$

(5B)

$$\text{Log}_7 \sqrt[6]{49} = \text{Log}_7 \sqrt[6]{7^2} = \text{Log}_7 7^{\frac{2}{6}} = \frac{2}{6} \text{Log}_7 7 = \frac{2}{6} \times 1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

■ تحقق من فهمك:

(6A)

$$\begin{aligned} &\text{Log}_{13} 6 + \text{Log}_{13} a^3 + \text{Log}_{13} b + \text{Log}_{13} c^4 \\ &= \text{Log}_{13} 6 + 3\text{Log}_{13} a + \text{Log}_{13} b + 4\text{Log}_{13} c \end{aligned}$$

(6B)

$$\begin{aligned} &\text{Log}_6 5 + \text{Log}_6 x^3 + \text{Log}_6 y^7 + \text{Log}_6 z^{0.5} \\ &= \text{Log}_6 5 + 3\text{Log}_6 x + 7\text{Log}_6 y + \frac{1}{2}\text{Log}_6 z \end{aligned}$$

$$\text{Log}_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1} \quad (6c)$$

$$\text{Log}_4 \sqrt[3]{1-x} - \text{Log}_4 2x+1$$

$$\text{Log}_4 (1-x)^{\frac{1}{3}} - \text{Log}_4 (2x+1)$$

■ تحقق من فهمك:

(7A)

$$\text{Log}_2 (x+1)^{-5} + \text{Log}_2 (6x)^3$$

$$= \text{Log}_2 \frac{(6x)^3}{(x+1)^5} = \text{Log}_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$$

(7B)

$$\text{Log}_3 (2x-1) + \text{Log}_3 \sqrt[4]{x+1}$$

$$= \text{Log}_3 \frac{(2x-1)}{\sqrt[4]{x+1}}$$

تدرب وحل المسائل

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ ، $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

(1)

$$\begin{aligned}\log_4 15 &= \log_4 3 \times 5 = \log_4 3 + \log_4 5 \\ &= 0.7925 + 1.1610 = 1.9535\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\log_4 \frac{5}{3} &= \log_4 5 - \log_4 3 \\ &= 1.1610 - 0.7925 = 0.3685\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\log_4 \frac{3}{4} &= \log_4 3 - \log_4 4 \\ &= 0.7925 - 1 = -0.2075\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\log_4 \frac{6}{10} &= \log_4 6 - \log_4 10 \\ &= 1.2924 - 1.66096 = -0.3685\end{aligned}$$

استعمل $Log_4 2 = 0.5$ ، $Log_4 3 \approx 0.7925$ ، $Log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي (5)

$$\begin{aligned} Log_4 30 &= Log_4 3 \times 5 \times 2 = Log_4 3 + Log_4 5 + Log_4 2 \\ &= 0.7925 + 1.1610 + 0.5 \\ &= 2.4535 \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} Log_4 20 &= Log_4 2 \times 5 \times 2 = Log_4 2 + Log_4 5 + Log_4 2 \\ &= 0.5 + 1.1610 + 0.5 \\ &= 2.1610 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Log_4 \frac{2}{3} &= Log_4 2 - Log_4 3 \\ &= 0.5 - 0.7925 = -0.2925 \end{aligned} \quad (7)$$

(8)

$$\begin{aligned} Log_4 \frac{4}{3} &= Log_4 4 - Log_4 3 \\ &= 1 - 0.7925 = -0.2075 \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned} Log_4 9 &= Log_4 3 \times 3 = Log_4 3 + Log_4 3 \\ &= 0.7925 + 0.7925 = 1.5850 \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} Log_4 8 &= Log_4 2 \times 2 \times 2 = Log_4 2 + Log_4 2 + Log_4 2 \\ &= 0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5 \end{aligned}$$

(11) تسلق الجبال:

إفرست:

$$a = 15500(5 - \log_{10} P) = 8850$$

$$5 - \log_{10} P = 0.57$$

$$4.429 = \log_{10} P$$

$$p = 26853.445$$

تريسون:

$$a = 15500(5 - \log_{10} P) = 7074$$

$$5 - \log_{10} P = 0.4563$$

$$4.5436 = \log_{10} P$$

$$p = 34962.3$$

بونيتي:

$$a = 15500(5 - \log_{10} P) = 6872$$

$$5 - \log_{10} P = 0.44335$$

$$4.5566 = \log_{10} P$$

$$p = 36024,669$$

استعمل $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، $\log_3 5 \approx 1.465$ ، $\log_5 7 \approx 1.2091$ ، $\log_6 8 \approx 1.1606$

لتقريب قيمة كل مما يأتي:

(12)

$$\log_3 5 \times 5 = \log_3 5 + \log_3 5 = 1.465 + 1.465 = 2.93$$

(13)

$$\log_5 7 \times 7 = \log_5 7 + \log_5 7 = 1.2091 + 1.2091 = 2.4182$$

(14)

$$\log_6 8 \times 6 = \log_6 8 + \log_6 6 = 1.1606 + 1 = 2.1606$$

(15)

$$\log_7 9 \times 9 = \log_7 9 + \log_7 9 = 1.1292 + 1.1292 = 2.2584$$

(16)

$$\log_6 8 \times 8 \times 8 = \log_6 8 + \log_6 8 + \log_6 8 = 1.1606 + 1.1606 + 1.1606 = 3.4818$$

(17)

$$\log_7 9 \times 9 \times 9 = \log_7 9 + \log_7 9 + \log_7 9 = 1.1292 + 1.1292 + 1.1292 = 3.3876$$

دون استعمال الآلة الحاسبة، اوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

(18)

$$\text{Log}_5 \sqrt[4]{25} = \text{Log}_5 5^{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} \text{Log}_5 5 = \frac{1}{2}$$

(19)

$$\text{Log}_2 \sqrt[5]{32} = \text{Log}_2 2^{\frac{5}{5}} = 1$$

(20)

$$3\text{Log}_7 \sqrt[6]{49} = 3\text{Log}_7 7^{\frac{2}{6}} = 3 \times \frac{1}{3} \text{Log}_7 7 = 1$$

(21)

$$4\text{Log}_2 \sqrt{8} = 4\text{Log}_2 8^{\frac{1}{2}} = 4 \times \frac{1}{2} \text{Log}_2 8 = 2 \times 3 = 6$$

(22)

$$50\text{Log}_5 \sqrt{125} = 50\text{Log}_5 125^{\frac{1}{2}} = 50 \times \frac{1}{2} \text{Log}_5 125 = 25 \times 3 = 75$$

(23)

$$\text{Log}_3 \sqrt[6]{243} = \text{Log}_3 243^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \text{Log}_3 243 = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتى بالصورة المطولة:

(24)

$$\begin{aligned} & \text{Log}_9 6 + \text{Log}_9 x^3 + \text{Log}_9 y^7 + \text{Log}_9 z \\ &= \text{Log}_9 6 + 3\text{Log}_9 x + 7\text{Log}_9 y + \text{Log}_9 z \end{aligned}$$

(25)

$$\begin{aligned} & \text{Log}_{11} a + \text{Log}_{11} b^{-4} + \text{Log}_{11} c^{12} + \text{Log}_{11} d^7 \\ &= \text{Log}_{11} a - 4\text{Log}_{11} b + 12\text{Log}_{11} c + 7\text{Log}_{11} d \end{aligned}$$

(26)

$$\begin{aligned} & \text{Log}_7 h^2 + \text{Log}_7 j^{11} + \text{Log}_7 k^{-5} \\ &= 2\text{Log}_7 h + 11\text{Log}_7 j - 5\text{Log}_7 k \end{aligned}$$

(27)

$$\begin{aligned} & \text{Log}_4 10 + \text{Log}_4 t^2 + \text{Log}_4 \mu + \text{Log}_4 \nu^{-3} \\ &= \text{Log}_4 10 + 2\text{Log}_4 t + \text{Log}_4 \mu - 3\text{Log}_4 \nu \end{aligned}$$

(28)

$$\begin{aligned} & \text{Log}_5 a^6 + \text{Log}_5 b^{-3} + \text{Log}_5 c^4 \\ &= 6\text{Log}_5 a - 3\text{Log}_5 b + 4\text{Log}_5 c \end{aligned}$$

(29)

$$\begin{aligned} & \text{Log}_2(3x + 2) - \text{Log}_2(1 - 5x)^{\frac{1}{7}} \\ &= \text{Log}_2(3x + 2) - \frac{1}{7} \text{Log}_2(1 - 5x) \end{aligned}$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

(30)

$$\text{Log}_5 \frac{x^3}{\sqrt{6-x}}$$

(31)

$$\text{Log}_7 \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}}$$

(32)

$$\text{Log}_3 \frac{a^7 b}{64c^2}$$

(33)

$$\text{Log}_8 \frac{81x^2}{(2x-5)}$$

(34)

$$\text{Log}_6 25a^2 b c^7$$

(35)

$$\text{Log}_2 \frac{x}{yz^3}$$

كيمياء:

(36)

$$\text{Log } kw = \text{Log } [H^+] + \text{Log } [OH^-] \quad (a)$$

$$\text{Log } kw = \text{Log } [H^+] + \text{Log } [OH^-] = -14 \quad (b)$$

$$-9 + \text{Log } [OH^-] = -14 \quad (c)$$

$$\text{Log } [OH^-] = -5$$

تركيز أيونات الهيدروكسيد 1×10^{-5} مول لكل لتر

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خطأ:

(37) خطأ

(38) صحيحة

(39) خطأ

(40) صحيحة

(41) صحيحة

(42) خطأ

(43) خطأ

(44) صحيحة

(45) هزة أرضية:

(a) أرمينيا و يوغسلافيا ، أو تركيا و أرمينيا

تركيا و يوغسلافيا.

(b) حوالي 9

مسائل مهارات التفكير العليا:

(46) استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ؟

نفرض ان $\log_b x = n$

باستخدام تعريف اللوغاريتم:

$$b^n = x$$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\log_a b^n = \log_a x$$

من خاصية الأسس

$$n \log_a b = \log_a x$$

بقسمة الطرفين على $\log_a b$

$$n = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

(47)

مسألة مفتوحة:

$$\log_b \frac{7x}{y} = \log_b 7 + \log_b x - \log_b y \quad (a)$$

$$\log_b m^2 p^3 = 2\log_b m + 3\log_b p \quad (b)$$

$$\text{Log}_b \frac{x^2 y^3}{z_4} = 2\text{Log}_b x + 3\text{Log}_b y - 4\text{Log}_b z \quad (c)$$

(48) برهان:

$$m^p = m^p$$

$$(b^{\text{Log}_b m})^p = b^{\text{Log}_b (m^p)}$$

$$b^{\text{Log}_b mp} = b^{\text{Log}_b (m^p)}$$

$$\text{Log}_b mp = \text{Log}_b m^p$$

$$p\text{Log}_b m = \text{Log}_b m^p$$

(49) تحد:

$$\text{Log}_{\sqrt{a}} (a^2) = x$$

$$(\sqrt{a})^x = a^2$$

$$(a^{\frac{1}{2}})^x = a^2$$

$$a^{\frac{x}{2}} = a^2$$

$$\frac{x}{2} = 2$$

$$x = 4$$

(50) إكتشف الخطأ:

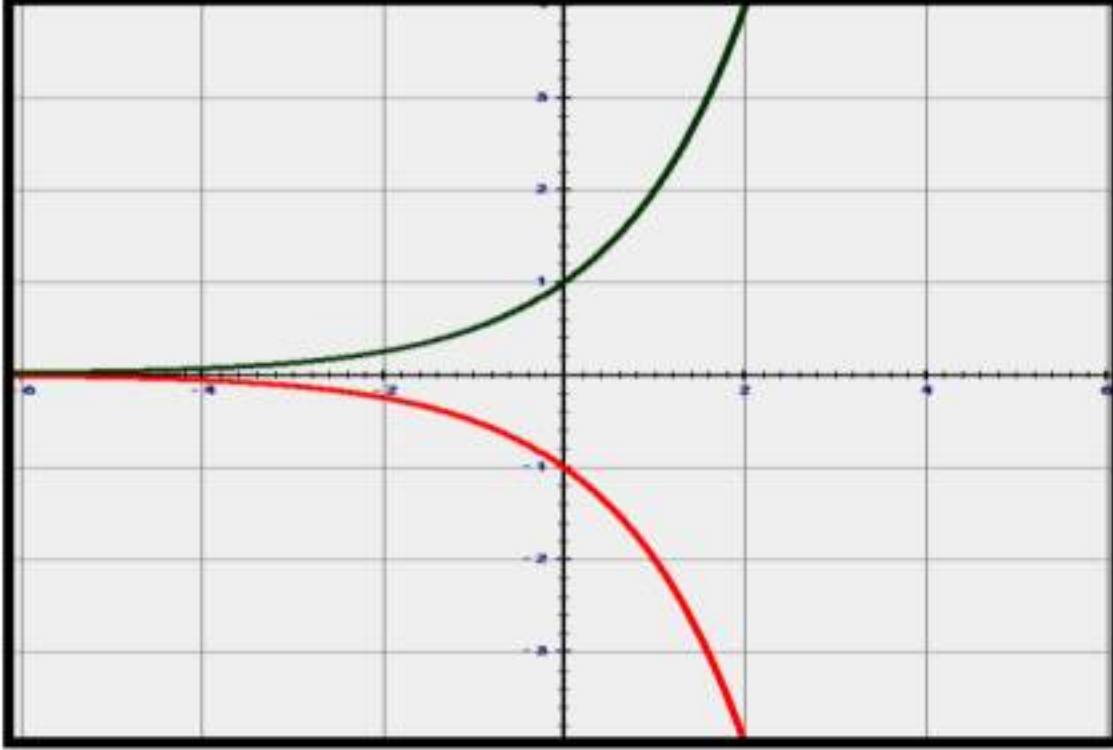
$\text{Log}_b \text{Log}_b 24 \neq \text{Log}_b 20 + \text{Log}_b 4$ جميع العبارات الاخرى تساوي $\text{Log}_b 24$

(51)

$$\begin{aligned} \log_4 18 &= \log_4 (9 \times 2) \\ &= \log_4 3^2 + \log_4 2 \\ &= 1.58496 + 0.5 \\ &= \mathbf{2.08496} \end{aligned}$$

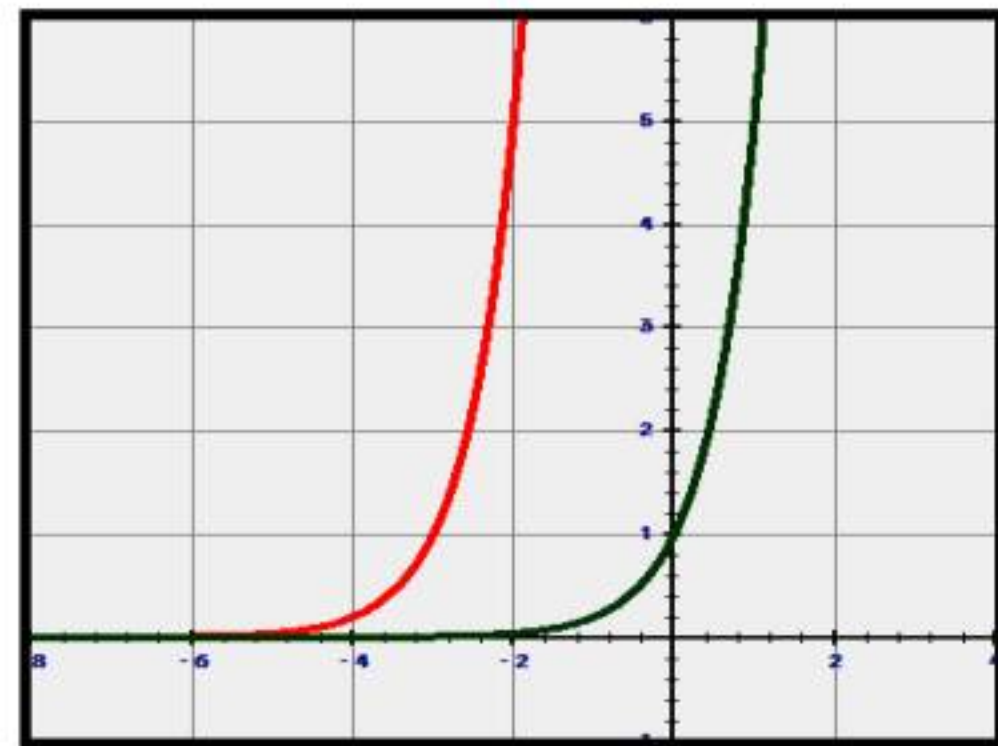
مراجعة تراكمية:

استعمل منحنى f لتصف التحويل الهندسى الذي ينتج منحنى g ، ثم مثل منحنى كل منهما بيانياً فى كل مما يأتى:



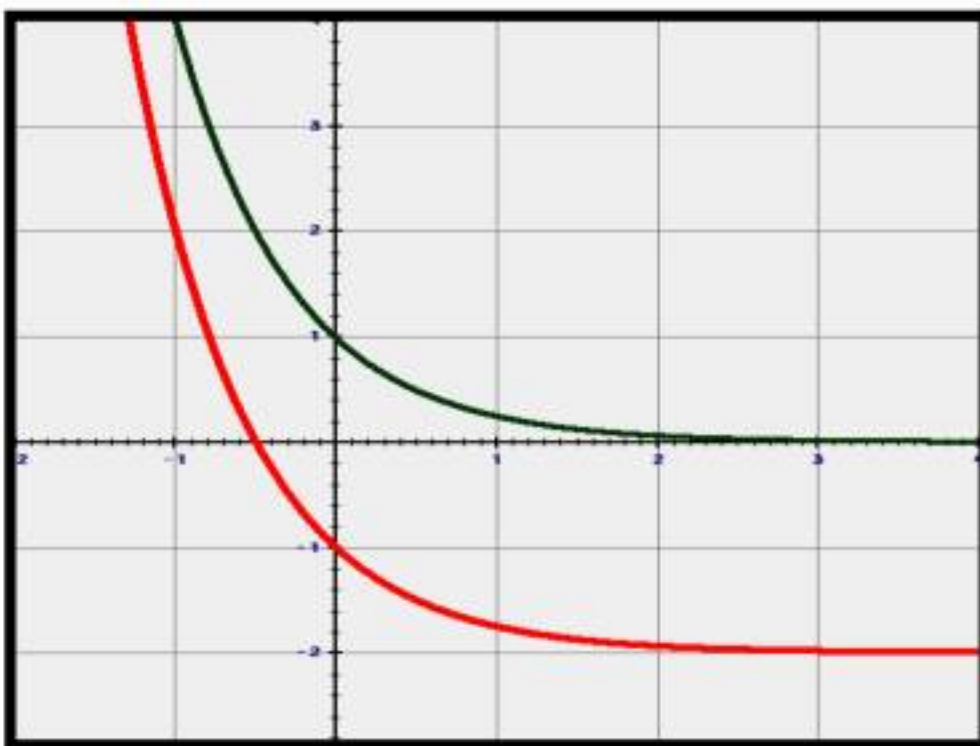
(52)

إنعكاس حول المحور x



(53)

إنسحاب لليسار 3 وحدات



(54)

إنسحاب لأسفل وحدتين

أوجد قيمة كلاً مما يأتي:

(55)

$$\log_4 4^{2x} = 2x \log_4 4 = 2x \times 1 = 2x$$

(56)

$$\log_3 3^{3x} = 3x \log_3 3 = 3x \times 1 = 3x$$

(57) كهرباء:

$$I = \left(\frac{P}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$I = \left(\frac{120}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = 6.3 \text{ A}$$

حدد إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، مع ذكر السبب:

(58) نعم لأن : $f(g(x)) = (x - 73) + 73 = x$

(59) لا لأن : $g(h(x)) = 7\left(\frac{1}{7}x + 11\right) - 11 = x + 77 - 11 = x + 66 \neq x$

حل كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة الحل:

(60)

$$3^{4x} = 3^{3-x}$$

$$\therefore 4x = 3 - x$$

$$\therefore 5x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{5}$$

(61)

$$3^{5x} \square 81^{1-x} = 9^{x-3}$$

$$\therefore 3^{5x} \square 3^{4(1-x)} = 3^{2(x-3)}$$

$$\therefore 5x + 4 - 4x = 2x - 6$$

$$\therefore x + 4 = 2x - 6$$

$$\therefore x = 10$$

(62)

$$7^{2x} = 7^{x^2-15}$$

$$\therefore 2x = x^2 - 15$$

$$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 5, \quad x = -3$$

(63)

$$\log_2(x+6)=5$$

$$\therefore x+6=5^2=25$$

$$\therefore x=19$$

تدرب على اختبار

(64)

$$\log_5 2 \leftarrow \leftarrow \leftarrow A$$

(65)

$$1 \leftarrow \leftarrow \leftarrow C$$

(2-5) حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

■ تحقق من فهمك:

(1)

$$x = 9^{\frac{3}{2}} = 27 \quad (1A)$$

$$x = 16^{\frac{5}{2}} = 1024 \quad (1B)$$

■ تحقق من فهمك:

(2)

$$x^2 - 15 = 2x$$

$$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 5, \quad x = -3$$

تحقق عوض عن كل من القيمتين

$$x = -3$$

$$\log_3(9 - 15) \stackrel{?}{=} \log_3 2(-3)$$

$$\log_3(-4) = \log_3(-6) \quad d$$

الإجابة الصحيحة هي $5 \leftarrow C$

$$x = 5$$

$$\log_3(25 - 15) \stackrel{?}{=} \log_3 2(5)$$

$$\log_3 10 = \log_3 10 \quad c$$

■ تحقق من فهمك:

(3)

(3A)

$$2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$$

$$\therefore x^2 = 27 \times 3$$

$$\therefore x^2 = 81$$

$$\therefore x = 9, \quad x = -9$$

$$x = 9$$

$$2\log_7 \overset{?}{9} = \log_7 27 + \log_7 3$$

$$\log_3 81 = \log_3 81 \quad \text{c}$$

تحقق عوض عن كل من القيمتين

$$x = -9$$

$$2\log_7 (\overset{?}{-9}) = \log_7 27 + \log_7 3 \quad \text{d}$$

(3B)

$$\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$$

$$\therefore \log_6 x (x + 5) = \log_6 36$$

$$\therefore x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$\therefore (x + 9)(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = -9, \quad x = 4$$

$$x = -9$$

$$\log_6 (-9) + \log_6 (\overset{?}{-9 + 5}) = 2$$

$$\log_6 (-9)(-4) = \log_6 36 = 2 \quad \text{c}$$

تحقق عوض عن كل من القيمتين

$$x = 4$$

$$\log_6 4 + \log_6 (\overset{?}{4 + 5}) = 2$$

$$\log_6 (4 \times 9) = \log_6 36 = 2 \quad \text{c}$$

■ تحقق من فهمك:

(4)

(4A)

$$x \geq 4^3$$

$$\{x \mid x \geq 64\}$$

(4B)

$$x < 2^4$$

$$\{x \mid 0 < x < 16\}$$

■ تحقق من فهمك:

(5)

$$2x + 1 \leq x + 4$$

$$\therefore x \leq 3$$

$$\left\{x \mid \frac{-1}{2} < x \leq 3\right\}$$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي:

$$x = 8^{\frac{4}{3}} = 16 \quad (1)$$

$$x = 16^{\frac{3}{4}} = 8 \quad (2)$$

$$x = 81^{\frac{4}{3}} = 27 \quad (3)$$

$$x = 25^{\frac{5}{2}} = 3125 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} = 8^x \quad \therefore x = -\frac{1}{3} \quad (5)$$

$$\frac{1}{36} = 6^x \quad \therefore x = -2 \quad (6)$$

$$32 = x^{\frac{5}{2}} \quad \therefore x = 4 \quad (7)$$

$$27 = x^{\frac{3}{2}} \quad \therefore x = 9 \quad (8)$$

حل كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(9)

$$5 \log_2 x = \log_2 32$$

$$\therefore x^5 = 32 \quad \therefore x = 2$$

للتحقق عوض عن $x = 2$

$$x = 2$$

$$5 \log_2 2^? = \log_2 32$$

$$\log_2 2^5 = \log_2 32 \quad \text{C}$$

(10)

$$3 \log_2 x = \log_2 8$$

$$\therefore x^3 = 8 \quad \therefore x = 2$$

للتحقق عوض عن $x = 2$

$$x = 2$$

$$3 \log_2 2 = \log_2 8$$

$$\log_2 2^3 = \log_2 8 \quad \text{C}$$

(11)

$$\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$$

$$\therefore \frac{48}{n} = 6 \quad \therefore n = 8$$

للتحقق عوض عن $n = 8$

$$n = 8$$

$$\log_4 48 - \log_4 8 = \log_4 6$$

$$\log_4 \frac{48}{8} = \log_4 6 \quad \text{C}$$

(12)

$$\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$$

$$\therefore 14x = 28 \quad \therefore x = 2$$

للتحقق عوض عن $x = 2$

$$x = 2$$

$$\log_3 4 + \log_3 7 = \log_3 28$$

$$\log_3 (4 \times 7) = \log_3 28 \quad \text{C}$$

(13)

$$\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$$

$$\therefore 20x = 40 \quad \therefore x = 2$$

للتحقق عوض عن $x = 2$

$$x = 2$$

$$\log_2 8 + \log_2 5 = \log_2 40$$

$$\log_2 (8 \times 5) = \log_2 28 \quad \text{C}$$

(14)

$$\log_4 a + \log_4 8 = \log_4 24$$

$$\therefore 8a = 24 \quad \therefore a = 3$$

للتحقق عوض عن $a = 3$

$$a = 3$$

$$\log_4 3 + \log_4 8 = \log_4 24$$

$$\log_4 (3 \times 8) = \log_4 24 \quad \text{C}$$

(15)

$$\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$$

$$\therefore n = 3 \times 36 \quad \therefore n = 108$$

للتحقق عوض عن $n = 108$

$$n = 108$$

$$\log_2 108 = \log_2 27^{\frac{1}{3}} + \log_2 36$$

$$\log_2 108 = \log_2 (3 \times 36) \quad \text{C}$$

(16)

$$3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$$

$$\therefore x = \frac{512}{6} \quad \therefore x = 85 \frac{1}{3}$$

للتحقق عوض عن $x = 85 \frac{1}{3}$

$$x = 85\frac{1}{3}$$

$$3\log_{10} 8 - \frac{1}{2}\log_{10} 36 = \log_{10} 85\frac{1}{3}$$

$$\log_{10}\left(\frac{512}{6}\right) = \log_{10} 85\frac{1}{3} \quad \text{C}$$

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي ثم تحقق من صحة حلك:

(17)

$$x > 5^3$$

$$\{x \mid x > 125\}$$

(18)

$$x \leq 8^{-2}$$

$$\left\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{64}\right\}$$

(19)

$$x < 6^{-3}$$

$$\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{216}\right\}$$

(20)

$$x \geq 4^4$$

$$\{x \mid x \geq 256\}$$

(21)

$$x \geq 3^{-4}$$

$$\left\{ x \mid x \geq \frac{1}{81} \right\}$$

(22)

$$x \leq 2^{-2}$$

$$\left\{ x \mid 0 < x \leq \frac{1}{4} \right\}$$

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(23)

$$2x + 5 \leq 4x - 3$$

$$\therefore 8 \leq 2x \quad \therefore x \geq 4$$

$$\{x \mid x \geq 4\}$$

(24)

$$2x > 6x - 8$$

$$\therefore 8 > 4x \quad \therefore x < 2$$

$$\left\{ x \mid \frac{8}{6} < x < 2 \right\}$$

(25)

$$4x - 6 > 2x + 8$$

$$\therefore 2x > 14$$

$$\therefore x > 7$$

$$\{x \mid x > 7\}$$

(26)

$$x + 2 \geq 6x - 3$$

$$\therefore 5 \geq 5x$$

$$\therefore x \leq 1$$

$$\left\{ x \mid \frac{1}{2} < x \leq 1 \right\}$$

(27) صوت:

$$L = 10 \log_{10} R = 80$$

$$\therefore R = 10^8$$

(28) علوم:

$$7 = 1 + \log_{10} x$$

$$6 = \log_{10} x$$

$$x = 10^6$$

$$\therefore x = 1000000$$

(a)

(b) 1000 مرة أكبر.

(29) تمثيلات متعددة:

(a) تحليلياً: التمثيلان البيانيان متشابهان وخط التقارب لكل منهما المحور y ، ومقطع المحور x هو 1 لهما.

(b) لفظياً: التمثيلان البيانيان يمثلان إنعكاساً لبعضهما في المحور x .

(c) تحليلياً: التمثيلان البيانيان يمثلان إنعكاساً لبعضهما في المحور x ،

المجال: $\{x | x > 0\}$ ، المدى: $\{R\}$

(30) علوم:

(a)

$$\log_{10} d = \frac{\omega - 65}{93}$$

$$\therefore d = 10^{\frac{\omega - 65}{93}}$$

(b)

$$\begin{aligned}\omega &= 93 \log_{10} d + 65 \\ &= 93 \log_{10} 525 + 65 \\ &= 317.97 \text{ mi/h}\end{aligned}$$

(31) صوت:

(a)

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{1}{10^{-12}} = 120 \text{ واط}$$

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{10^{-2}}{10^{-12}} = 100 \text{ واط}$$

(b) تتغير قوة اللوغاريتم بمقدار 2 وهذا يعني أن عدد وحدات الديسيبل تتغير بمقدار

$$10 \log_{10} 10^2 = 20$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

(32) أكتشف الخطأ:

ريم، لأن هناء حولت الصورة اللوغاريتمية إلى صورة أسية بشكل خاطئ.

(33) تحذ:

$$\log_3 3^3 + \log_9 9^{\frac{3}{2}} + \log_{27} 27 + \log_{81} 81^{\frac{3}{4}} + \log_{243} 243^{\frac{3}{5}}$$

$$= 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{137}{20} = 6.85$$

(34) تبرير:

إذا كان $0 < b < 1$ فإن $\log_b x > \log_b y$ $\therefore$ فقط إذا كان $x < y$ ، إنعكست إشارة المتباينة لأن الكسر الأصغر من 1 يكون أصغر عند رفعة لقوة أكبر.

(35) أكتب:

الدالة اللوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية من الصورة $y = b^x$ ، ومجال أحدهما يساوي مجال الأخرى.

(36) مسألة مفتوحة:

$$\log_3 (x + 4) = \log_3 (3x + 12)$$

(37) تبرير:

(a) أصغر من	(b) أصغر من
(c) لا حل لها	(d) لها عدد لانهائي من الحلول

(38) أكتب:

مقطع المحور y للدالة الأسية $y = b^x$ هو $(0, 1)$ وعند قلب الإحداثيات فإن المقطع y يتغير إلى مقطع المحور x عند النقطة $(1, 0)$. وبما أنه لا يوجد مقطع للمحور x عند النقطة $(0, 1)$ للدالة الأسية $y = b^x$ فإنه عند قلب الإحداثيات فلن يكون هناك نقطة تناظر عند النقطة $(0, 1)$ ولن يكون هناك مقطع المحور y للدالة.

مراجعة تراكمية:

حل كل مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:
(39)

$$3^{3x-2} > 3^4$$

$$\therefore 3x - 2 > 4$$

$$\therefore 3x > 6$$

$$\therefore x > 2$$

(40)

$$3^{4x-7} = 27^{2x+3} = 3^{3(2x+3)}$$

$$\therefore 4x - 7 = 6x + 9$$

$$\therefore 2x = -16$$

$$\therefore x = -8$$

(41)

$$8^{x-4} = 2^{4-x}$$

$$\therefore 2^{3(x-4)} = 2^{4-x}$$

$$\therefore 3x - 12 = 4 - x$$

$$\therefore 4x = 16$$

$$\therefore x = 4$$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

(42)

$$\log_4 256$$
$$= \log_4 4^4 = 4 \log_4 4 = 4$$

(43)

$$\log_2 \frac{1}{8}$$
$$= \log_2 2^{-3} = -3 \log_2 2 = -3$$

(44)

$$\log_6 216$$
$$= \log_6 6^3 = 3 \log_6 6 = 3$$

(45)

$$\log_7 2401$$
$$= \log_7 7^4 = 4 \log_7 7 = 4$$

بسط كلاً مما يأتي، مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي الصفر:

(46)

$$x^5 \div x^3 = x^8$$

(47)

$$(2p^2n)^3 = 4p^6n^3$$

(48)

$$\frac{x^4 \cdot y^6}{xy^2} = x^3 y^4$$

(49)

$$\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0 = 1$$

تدرب على اختبار:

(50)

$$f(x) = -10(2)^x \quad \leftarrow \leftarrow \leftarrow A$$

(51)

$$2 \quad \leftarrow \leftarrow \leftarrow D$$

(2-6) اللوغاريتمات العشرية

■ تحقق من فهمك:

(1)

$$\text{Log}_7 \approx 0.8451 \quad (1A)$$

$$\text{Log}_{0.5} \approx -0.3010 \quad (1B)$$

■ تحقق من فهمك:

(2) هزات أرضية:

$$\text{Log } E = 11.8 + 1.5M = 11.8 + 1.5 \times 9$$

$$\text{Log } E = 25$$

$$E = 10^{25}$$

■ تحقق من فهمك:

(3A)

$$x \text{Log } 3 = \text{Log } 15$$

$$x = \frac{\text{Log } 15}{\text{Log } 3} = 2.465$$

(3B)

$$x \text{Log } 6 = \text{Log } 42$$

$$x = \frac{\text{Log } 42}{\text{Log } 6} = 2.086$$

■ تحقق من فهمك:
(4A)

$$\begin{aligned} \log 3^{2x} &\geq \log 6^{x+1} \\ 2x \log 3 &\geq (x+1) \log 6 \\ 2x \log 3 &\geq x \log 6 + \log 6 \\ 2x \log 3 - x \log 6 &\geq \log 6 \\ x(2 \log 3 - \log 6) &\geq \log 6 \\ x &\geq \frac{\log 6}{2 \log 3 - \log 6} \\ x &\geq 4.419 \end{aligned}$$

(4B)

$$\begin{aligned} \log 4 + \log y &< \log 5^{2y+1} \\ \log 4 + \log y &< (2y+1) \log 5 \\ \log 4 + \log y &\geq 2y \log 5 + \log 5 \\ y &\geq -0.8782 \end{aligned}$$

■ تحقق من فهمك:
(5)

$$\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} = 1.1606$$

■ تحقق من فهمك:
(6)

$$\begin{aligned} R &= \log_2 n = \log_2 160 \\ \frac{\log_{10} 160}{\log_{10} 2} &= 7.32 \text{ s} \end{aligned}$$

تدرب وحل المسائل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(1) 0.6990

(2) 1.3222

(3) -0.3979

(4) 0.4771

(5) 1.0414

(6) 0.5051

(7) 0.9138

(8) -0.0458

(9) -1.3979

(10) علوم:

$$\text{Log } E = 11.8 + 1.5M = 11.8 + 1.5 \times 8.5$$

$$\text{Log } E = 24.55$$

$$E = 10^{24.55}$$

(11) صوت:

(a) حوالى 316227766

(b) 19952623 مرة، النسبة 93.7Å تقريباً

حل كل معادلة مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(12)

$$x \text{Log } 6 = \text{Log } 40$$

$$x = \frac{\text{Log } 40}{\text{Log } 6} = 2.0588$$

(13)

$$(a + 2) \text{Log} (2.1) = \text{Log} (8.25)$$

$$a = \frac{\text{Log} 8.25}{\text{Log} 2.1} - 2 = 0.8442$$

(14)

$$x^2 \text{Log} (7) = \text{Log} (20.42)$$

$$x = \sqrt{\frac{\text{Log} 20.42}{\text{Log} 7}} = \pm 1.2451$$

(15)

$$(b - 3) \text{Log} (11) = b \text{Log} (5)$$

$$b \text{Log} (11) - 3 \text{Log} (11) = b \text{Log} (5)$$

$$b (\text{Log} (11) - \text{Log} (5)) = 3 \text{Log} (11)$$

$$b = \frac{3 \text{Log} (11)}{\text{Log} (11) - \text{Log} (5)} = 9.1237$$

(16)

$$x \text{Log} 8 = \text{Log} 40$$

$$x = \frac{\text{Log} 40}{\text{Log} 8} = 1.7740$$

(17)

$$(b - 1) \text{Log} (9) = b \text{Log} (7)$$

$$b \text{Log} (9) - \text{Log} (9) = b \text{Log} (7)$$

$$b (\text{Log} (9) - \text{Log} (7)) = \text{Log} (9)$$

$$b = \frac{\text{Log} (9)}{\text{Log} (9) - \text{Log} (7)} = 8.7429$$

(18)

$$x^2 \text{Log} (15) = \text{Log} (110)$$

$$x = \sqrt{\frac{\text{Log} 110}{\text{Log} 15}} = \pm 1.3175$$

(19)

$$2y \text{Log} (2) = (y - 1) \text{Log} (3)$$

$$y = \frac{-\text{Log} (3)}{2\text{Log} (2) - \text{Log} (3)} = -3.8188$$

حل كل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(20)

$$4n \text{Log} (5) > \text{Log} (33)$$

$$n > \frac{\text{Log} (33)}{4\text{Log} (5)}$$

$$n > 0.5431$$

(21)

$$(p - 1) \text{Log } (6) = p \text{Log } (4)$$

$$p = \frac{\text{Log } (6)}{\text{Log } (6) - \text{Log } (4)}$$

$$p = 4.4190$$

(22)

$$(y - 1) \text{Log } 3 \leq y \text{Log } 4$$

$$y \leq \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 3 - \text{Log } 4}$$

$$y \leq -3.81884$$

(23)

$$(p - 2) \text{Log } 5 \leq p \text{Log } 2$$

$$p \leq \frac{2 \text{Log } 5}{\text{Log } 5 - \text{Log } 2}$$

$$p \leq 3.5129$$

(24)

$$4x \text{Log } 2 \leq \text{Log } 20$$

$$x \leq \frac{\text{Log } 20}{4 \log 2}$$

$$x \leq 1.0805$$

(25)

$$3n \text{Log } 6 > \text{Log } 36$$

$$n > \frac{\text{Log } 36}{3 \log 6}$$

$$n > 0.6667$$

أكتب كلاً مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمة تقريباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$5^{p-2} \leq 2^p \quad (27)$$

$$3^{y-1} \leq 4^y \quad (26)$$

$$6^{3n} > 36 \quad (29)$$

$$2^{4x} \leq 20 \quad (28)$$

$$\frac{\log 7}{\log 3} = 1.7712 \quad (26)$$

$$\frac{\log 16}{\log 2} = 4 \quad (27)$$

$$\frac{\log 9}{\log 4} = 1.5850 \quad (28)$$

$$\frac{\log 21}{\log 3} = 2.7712 \quad (29)$$

$$\frac{\log 7.29}{\log 5} = 1.2343 \quad (30)$$

$$\frac{\log \sqrt{5}}{\log 7} = 0.4135 \quad (31)$$

(32) شحن:
(a)

$$t = \log_{(1-r)} \frac{v}{p}$$

$$t = \log_{(1-0.15)} \frac{120000}{168000} \approx 2 \quad \text{سنتان}$$

(b)

$$t = \log_{(1-0.1)} \frac{102000}{168000} \approx 5 \text{ خمس سنوات تقريباً}$$

(33) علوم بيئة:

(a) نعم، لأن: $10.9 > 9.5$

(b) لا

(c) حوالي 3.16×10^{-10}

(34) هزات أرضية:

$$M = \frac{2}{3} (\log E - \log 10^{4.4}) \quad (a)$$

$$M = 5 \quad (b)$$

$$M = 1.67 \quad (c)$$

$$E = 7.94 \times 10^8 \text{ جول} \quad (d)$$

(35) تمثيلات متعددة:

(a) جدولياً: الحل يقع بين 1.8 ، 1.9

(b) بيانياً: (1.85,13)

(c) عددياً: نعم جميع الطرق تعطي النتيجة نفسها 1.8 ، لأنك بدأت من المعادلة نفسها وإن لم يكن كذلك فقد أخطأت.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(36) أكتشف الخطأ:

بلال؛ لأن خالد نسي أن يضرب في العدد 3 عند أحد اللوغاريتمات.

(37) تحدد:

المعادلة الأصلية

$$\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$$

صيغة تغيير الأساس

$$\frac{\log_a 3}{\log_a \sqrt{a}} = \log_a x$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\log_a 3}{\frac{1}{2}} = \log_a x$$

بضرب كلا من البسط والمقام في العدد 2

$$2\log_a 3 = \log_a x$$

خاصية لوغاريتم القوة

$$\log_a 3^2 = \log_a x$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$3^2 = x$$

بالتبسيط

$$9 = x$$

(38) أكتب:

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} = \frac{1}{\log b} \log x$$

لذا اللوغاريتم ذو الأساس b هو حاصل ضرب ثابت في اللوغاريتم الطبيعي المناظر له.

(39) برهان:

$$\log_{27} 3 = \frac{1}{3}, \quad \log_3 27 = 3, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

(40) أكتب:

اللوغاريتمات هي أسس ولحل معادلاتها أكتب كلاً من الطرفين بالصورة الأسية وحلها بإستعمال خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات.
ولحل معادلة أسية: بإستعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية وخاصية القوة في اللوغاريتمات.

مراجعة تراكمية:

حل كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك:

(41)

$$\log_5(7x-2) = \log_5 x$$

$$x = 14$$

(42)

$$\log_2\left(\frac{x^2}{x+3}\right) = \log_2 4$$

$$x^2 = 4x + 12$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0$$

$$x = 6, x = -2$$

$$x = 6$$

$$x = -2$$

$$2\log_2 6 - \log_2(6+3) \stackrel{?}{=} 2$$

$$2\log_2(-2) - \log_2(-2+3) \stackrel{?}{=} 2 \quad \text{d للتحقق}$$

$$\log_2\left(\frac{36}{9}\right) = \log_2 4 = 2 \quad \text{c}$$

(43) $x = 15$

حل كل متباينة مما يأتي وتحقق من صحة حلك:

(44)

$$\log_8(3y - 1) < \log_8(y + 5)$$

$$3y - 1 < y + 5$$

$$2y < 6$$

$$y < 3$$

$$\left\{ y \mid \frac{1}{3} < y < 3 \right\}$$

(45)

$$\log_9(9x + 4) \leq \log_9(11x - 12)$$

$$9x + 4 \leq 11x - 12$$

$$-2x \leq -16$$

$$x \geq 8$$

$$\{x \mid x \geq 8\}$$

(46)

$$C \leftarrow \leftarrow \leftarrow 3 \text{ سنوات}$$

تدرب على اختبار:

(47)

$$x^2 - 6x + 8 \leftarrow \leftarrow \leftarrow B$$

(48)

$$-4 \leftarrow \leftarrow \leftarrow A$$

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية *TI - nspire* لحل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

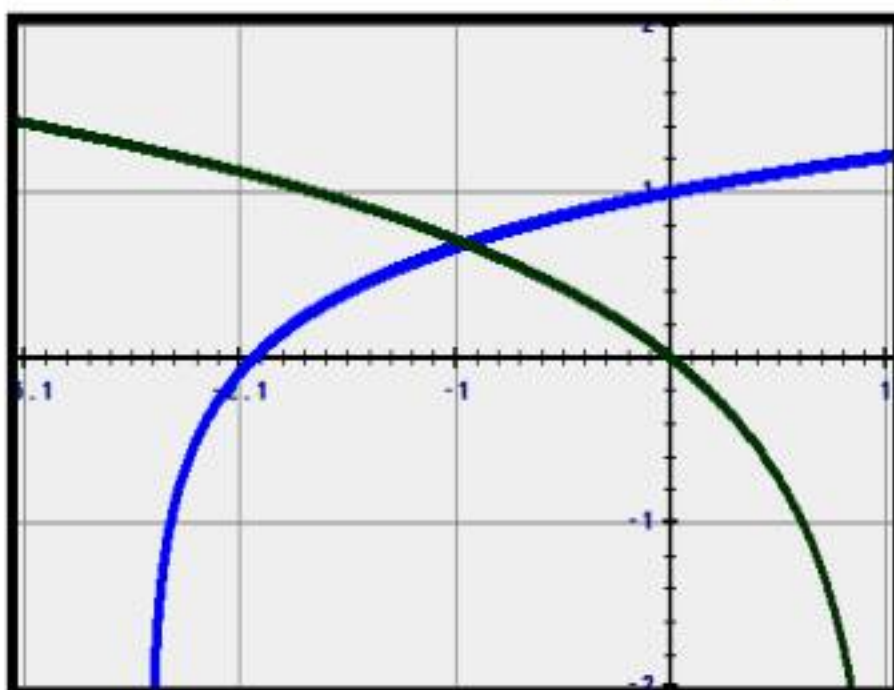
(2) $x = 5$



(1) $x = 0$, $x = 2$



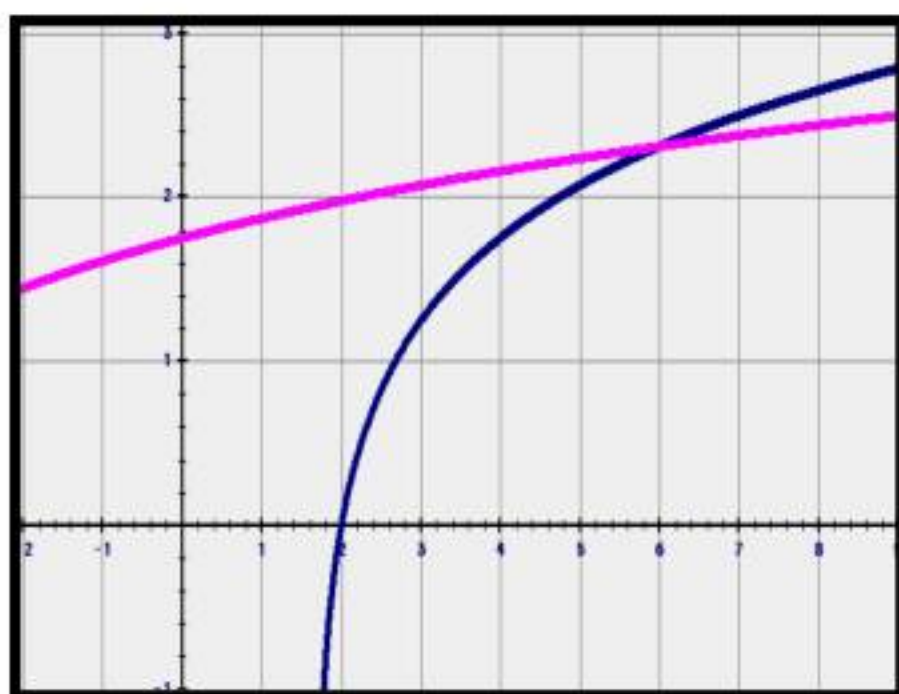
(4) $x = 1.5$



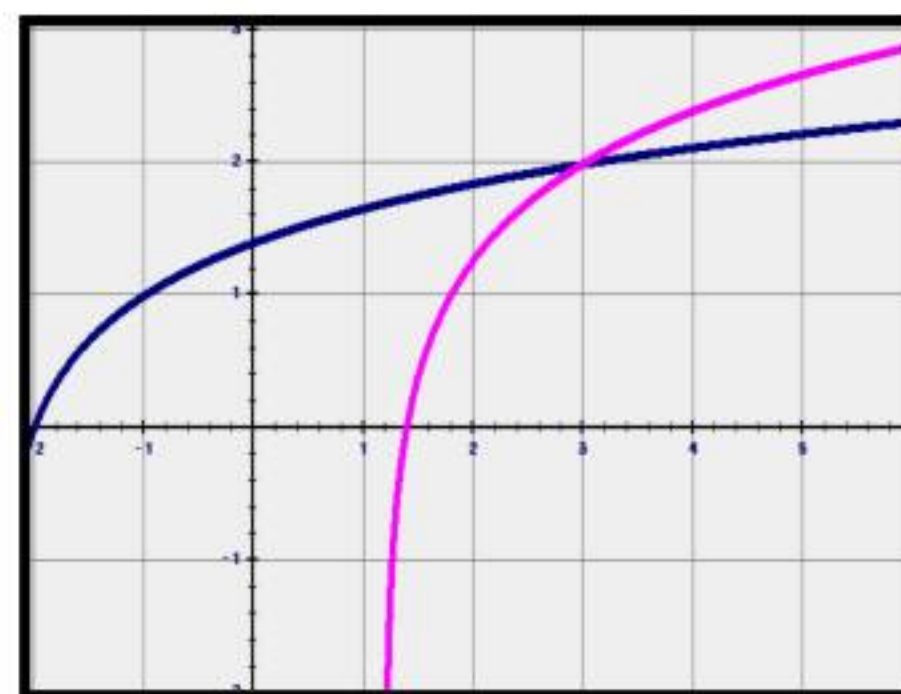
(3) $x = 0.7$



$$x = 6 \quad (6)$$



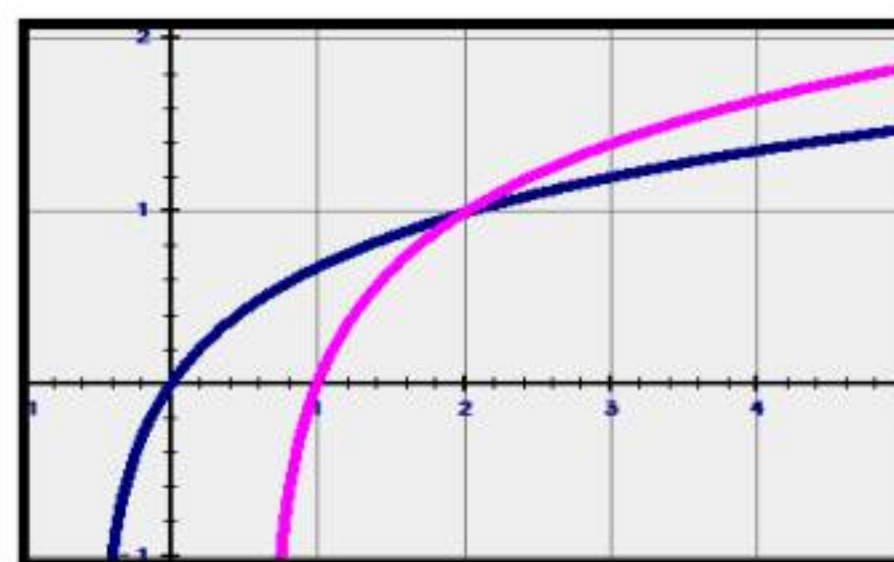
$$x = 3 \quad (5)$$



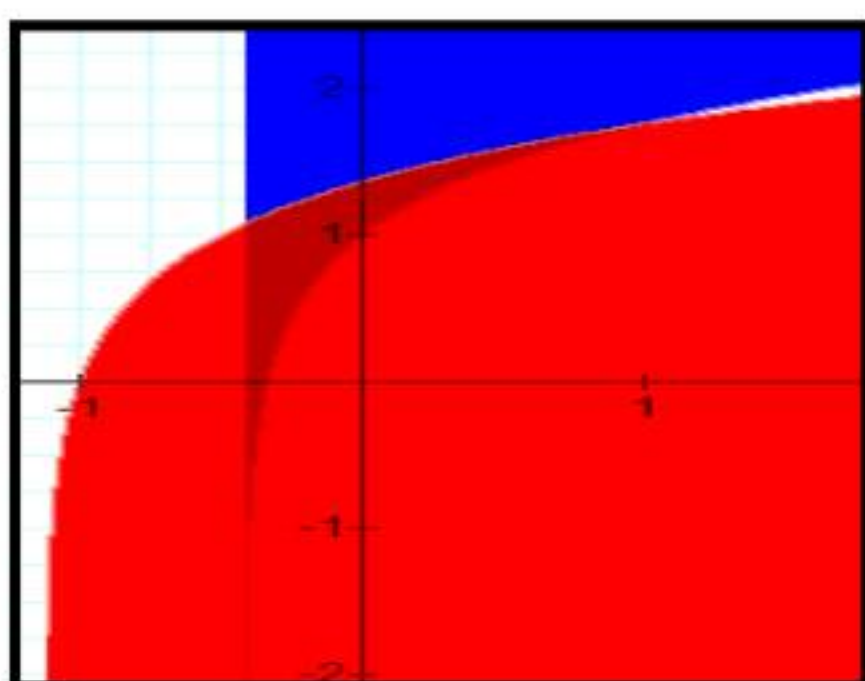
$$x = 1 \quad (8)$$



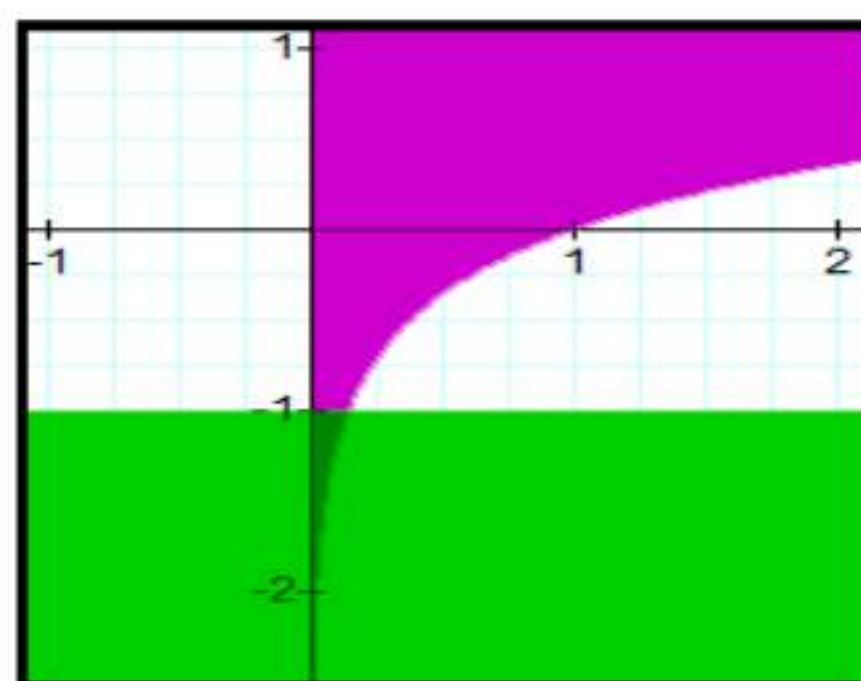
$$x = 2 \quad (7)$$



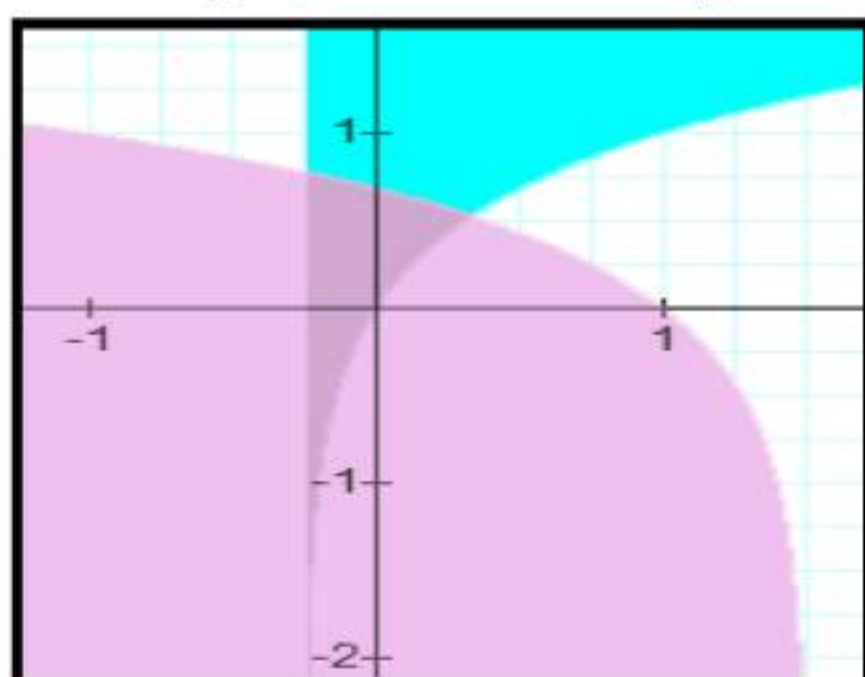
$$\{x \mid x \leq 1\} \quad (10)$$



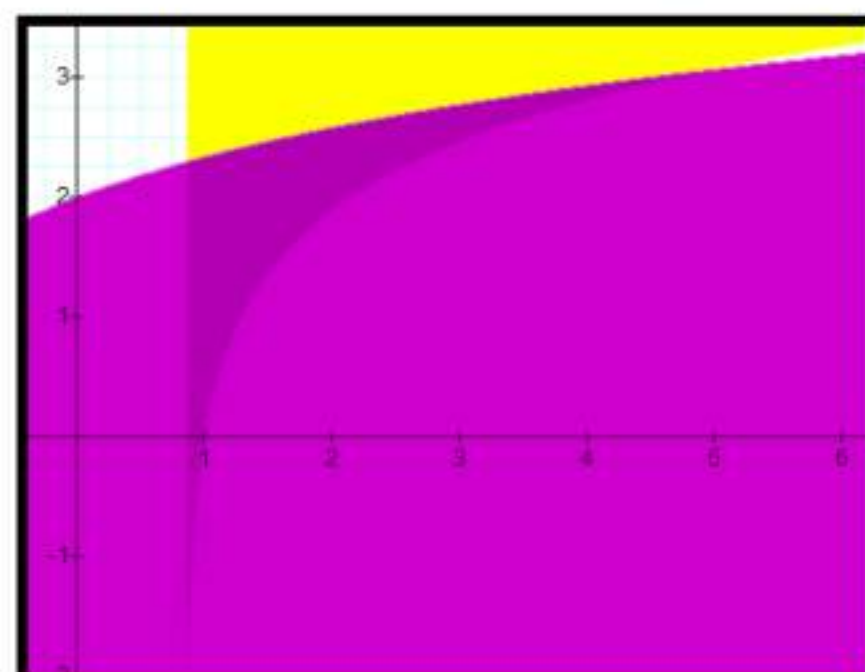
$$\left\{x \mid x < \frac{1}{7}\right\} \quad (9)$$



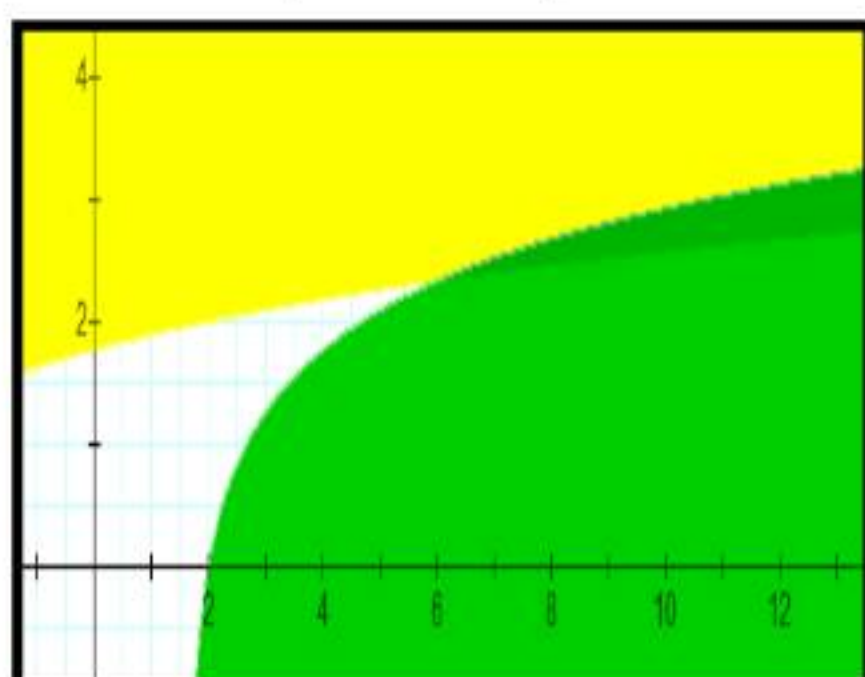
$$\left\{x \mid -\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}\right\} \quad (12)$$



$$\{x \mid x < 5\} \quad (11)$$



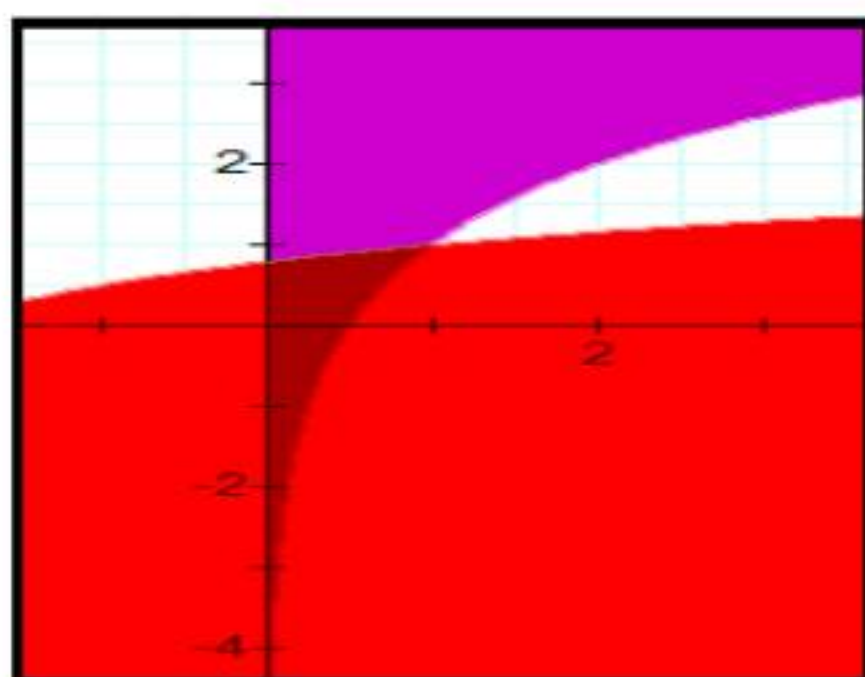
$$\{x \mid x \geq 6\} \quad (14)$$



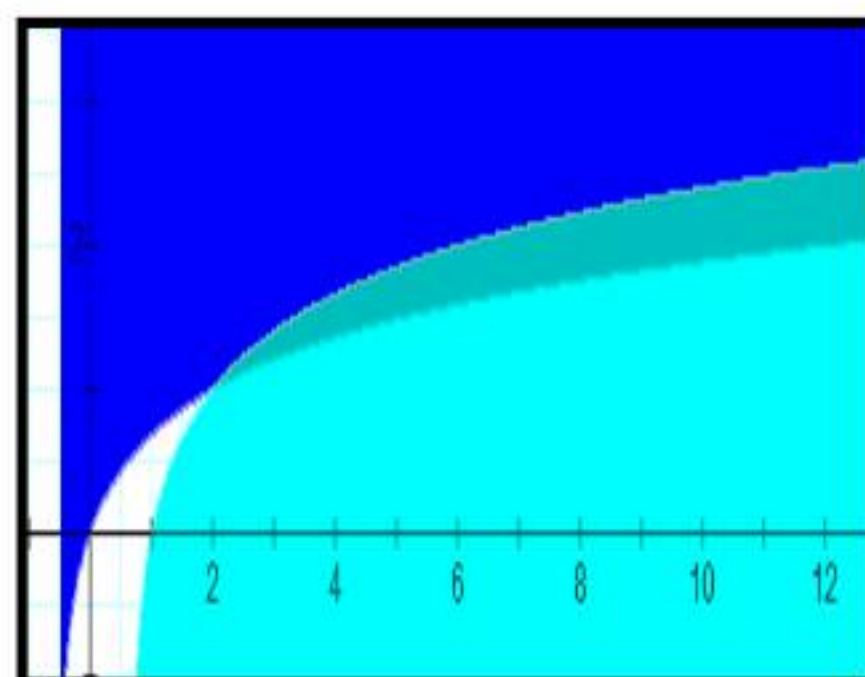
$$\{x \mid 0.06 < x < 0.17\} \quad (13)$$



$$\{x \mid 0 < x \leq 1\} \quad (16)$$

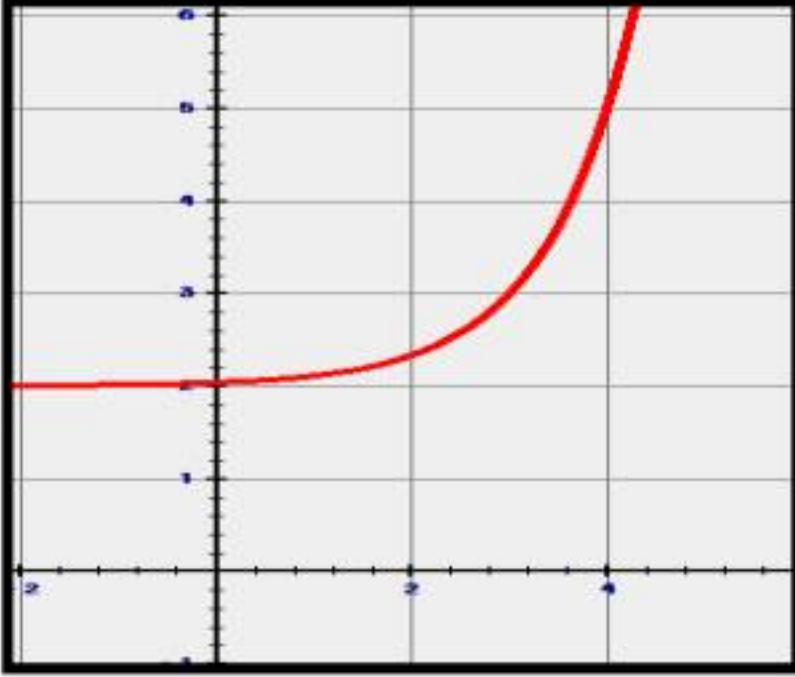


$$\{x \mid x \geq 2\} \quad (15)$$



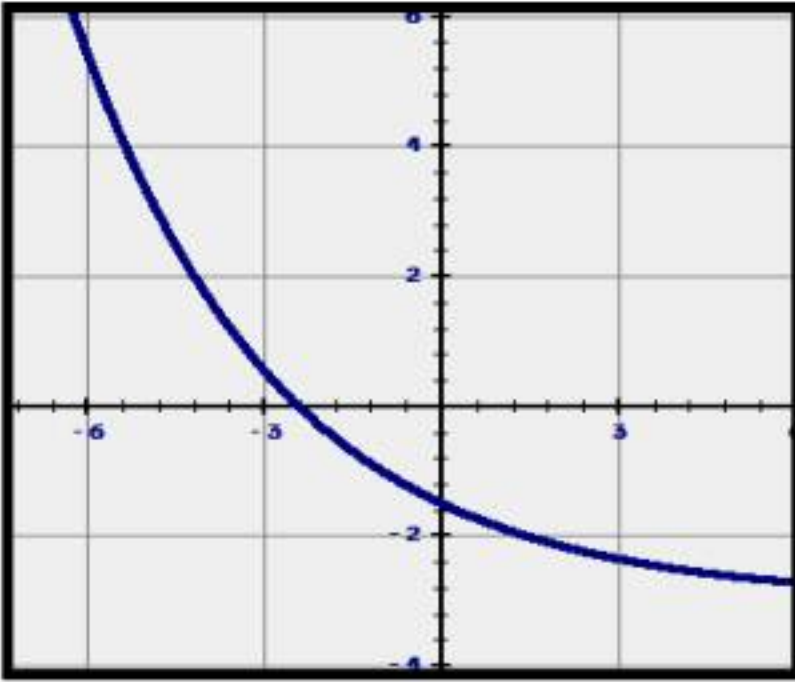
دليل الدراسة و المراجعة

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً وحدد مجالها ومداها :
(1)



المجال: R

المدى: $\{f(x) | f(x) > 2\}$



(2)

المجال: R

المدى: $\{f(x) | f(x) \geq 3\}$

حل كل معادلة أو متباينة مما يلي، وقرب الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية كلما لزم ذلك :

(3)

$$2^{3(c+1)} = 2^{4(2c+3)}$$

$$\therefore 3c + 3 = 8c + 12$$

$$\therefore c = -\frac{9}{5} = -1.8$$

(4)

$$3^{2(x-2)} > 3^{-3x}$$

$$\therefore 2x - 4 > -3x$$

$$\therefore x > \frac{4}{5} \quad \therefore x > 0.8$$

(5)

$$\log 2^{a+3} = \log 3^{2a-1}$$

$$\therefore a \log 2 + 3 \log 2 = 2a \log 3 - \log 3$$

$$\therefore a = \frac{-3 \log 2 - \log 3}{\log 2 - 2 \log 3}$$

$$\therefore a = 2.1130$$

(6)

$$x^2 - 7 = 6x$$

$$\therefore x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\therefore (x - 7)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 7, \quad x = -1$$

وبعد التحقق فإن $x = 7$

(7)

$$x > 5^2$$

$$\therefore x > 25$$

(8)

$$\log_3 x + \log_3 (x - 3) = \log_3 4$$

$$\therefore \log_3 (x(x - 3)) = \log_3 4$$

$$\therefore x^2 - 3x = 4$$

$$\therefore x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\therefore (x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 4, \quad x = -1$$

وبعد التعويض $x = 4$

(9)

$$6^{n-1} \leq 11^n$$

$$\therefore \log 6^{n-1} \leq \log 11^n$$

$$\therefore (n - 1) \log 6 \leq n \log 11$$

$$\therefore n \leq \frac{\log 6}{\log 6 - \log 11}$$

$$\therefore n \leq -2.9560$$

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$ ، $\log_5 11 \approx 1.4899$ لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من

عشرة آلاف:

(10)

$$\begin{aligned} \log_5 44 &= \log_5 (2 \times 2 \times 11) = \log_5 2 + \log_5 2 + \log_5 11 \\ &= 0.4307 + 0.4307 + 1.4899 = 2.3513 \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} \log_5 \frac{11}{2} &= \log_5 11 - \log_5 2 \\ &= 1.4899 - 0.4307 = 1.0592 \end{aligned}$$

(12) سكان:

$$y = 185000(1.0212)^x \quad (a)$$

$$18500(1.0212)^{25} = 312566 \quad \text{تقريبا} \quad (b)$$

$$9^{\frac{3}{2}} = 27 \quad (13)$$

$$-3 \leftarrow \leftarrow \leftarrow A \quad (14)$$

(15) زراعة:

$$b < 1 \quad (a)$$

$$2\ddot{A} \quad (b)$$

$$2028 \quad \text{تقريبا} \quad (b)$$

(16) نوفمبر:

$$8690 \quad \text{ريال تقريبا} \quad (a)$$

$$2.31 \quad \text{سنة} \quad (b)$$

$$3.2 \quad \text{سنة} \quad (b)$$

(17) إختيار من متعدد:

$$2 \leftarrow \leftarrow \leftarrow G$$

(18) إختيار من متعدد:

$$y = \log_{10}(x+5) \leftarrow \leftarrow \leftarrow C$$

(19)

$$\log_3 \frac{t^2(z-2)^6}{x^2}$$

(20)

$$(3^3)^{3x} \leq (3^2)^{2x-1}$$

$$(3)^{9x} \leq (3)^{4x-2}$$

$$9x = 4x - 2$$

$$5x = -2$$

$$x = \frac{-2}{5}$$

(21)

(a)

$$5000 = ab^0$$

$$5000 = a$$

$$28000 = 5000b^8$$

$$b^8 = 5.6$$

$$b = \sqrt[8]{5.6} = 1.24$$

$$y \approx 5000(1.24)^x$$

(b)

$$y \approx 5000(1.24)^{32}$$

(22)

$$\frac{1}{16} = 2^{-4}$$

(23)

$$\log_{10} 100 = 2$$

(24)

$$\log_4 256$$

$$256 = 4^y$$

$$4^4 = 4^y$$

$$y = 4$$

$$\log_4 256 = 4$$

(25)

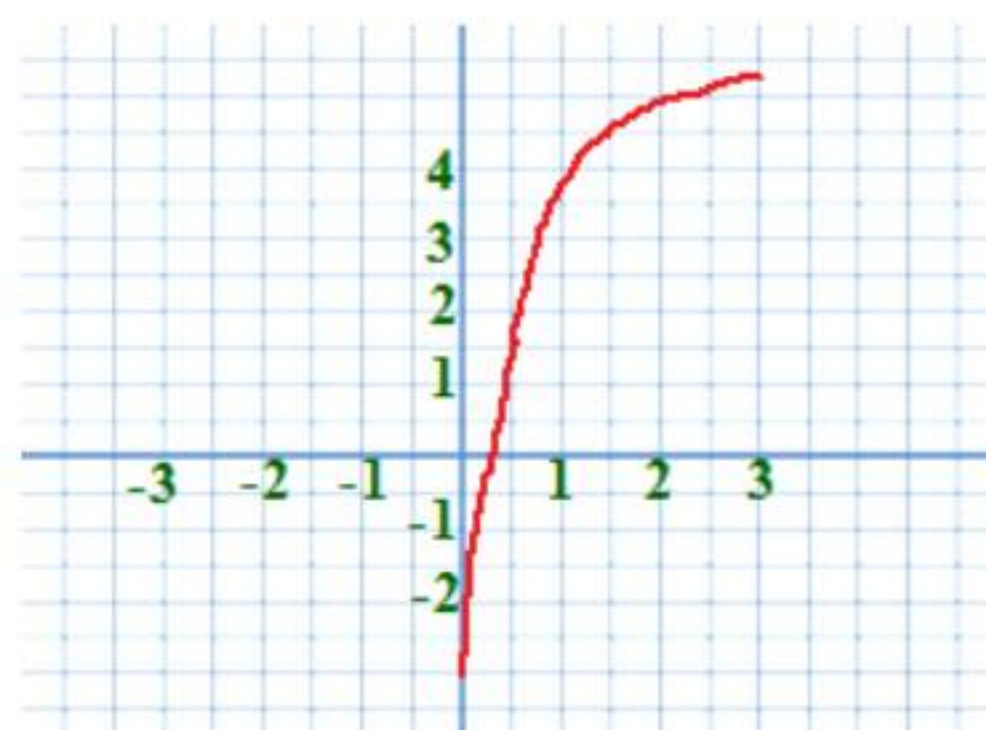
$$\log_2 \frac{1}{8} = -3$$

(26)

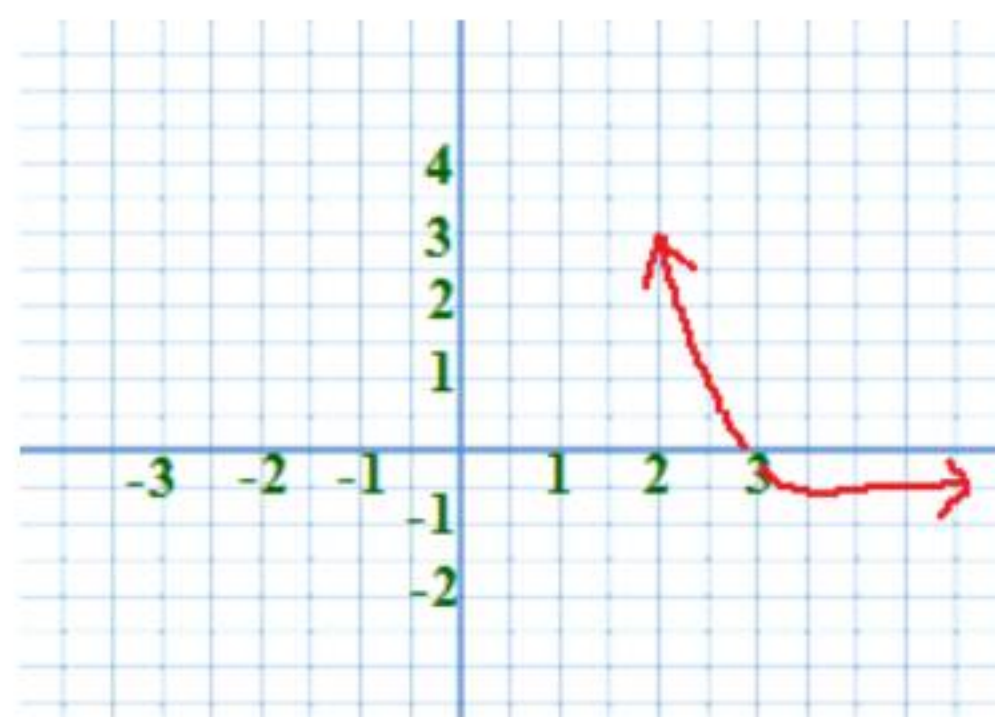
$$a = 2$$

$$h = 0$$

$$k = 4$$



(27)



(28)

$$\log_5 8 = \log_5 (\log_5 2 + \log_5 2 + \log_5 2)$$

$$\log_5 8 = (0.4307 + 0.4307 + 0.4307)$$

$$\log_5 8 \approx 1.3$$

(29)

$$\begin{aligned}\log_5 64 &= \log_5 (16 \times 4) = (\log_5 16 + \log_5 2 + \log_5 2) \\ &= (1.7227 + 0.4307 + 0.4307)\end{aligned}$$

$$\log_5 64 \approx 2.6$$

(30)

$$\log_5 4 \approx 0.9$$

(31)

$$\log_5 \frac{1}{8} \approx -1.3$$

(32)

$$\log_5 \frac{1}{2} \approx -0.4$$

(33)

$$\log_3 2x^5 + \log_3 y^2 + \log_3 z^3$$

$$5\log_3 2x + 2\log_3 y + 3\log_3 z$$

(34)

$$\log_5 ab^{-3} + \log_5 c^4 + \log_5 d^{-2}$$

$$-3\log_5 ab + 4\log_5 c - 2\log_5 d$$

(35)

$$\log_2 (x^2)^3 - \log_2 (x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_2 (x^2)^3 - \log_2 \sqrt[3]{(x-4)}$$

$$\frac{\log_2 x^6}{\log_2 \sqrt[3]{(x-4)}}$$

(36)

$$2\log_2 (z-1) - \log_2 (2z-1)$$

$$\log_2 (z-1)^2 - \log_2 (2z-1)$$

$$\frac{\log_2 (z-1)^2}{\log_2 (2z-1)}$$

(37)

1000 مرة

(38)

(39)

−6

(40)

$$\log_4 x < 3$$

$$x < 4^3$$

$$x < 64$$

(41)

$$\log_5 x < -3$$

$$x < 5^{-3}$$

$$x < \frac{1}{125}$$

(42) لا يوجد حل

(43) −6

(44) لا يوجد حل

(45) 361.6 مرة

$$x \approx 2.4650 \quad (46)$$

$$x \approx \pm 1.3637 \quad (47)$$

$$m \approx 0.6356 \quad (48)$$

$$r \approx 4.6102 \quad (49)$$

$$n \approx 0.5786 \quad (50)$$

$$x \approx -6.3013 \quad (51)$$

(52)

(a

$$1.7297 \approx \frac{\log 11}{\log 4}$$

(b)

$$1.7297 \approx \frac{\log 15}{\log 2}$$

(53)

(a)

$$A = p \left(1 + \frac{0.5}{3} \right)^{3t}$$

8.2 سنة تقريباً

(b) 13.9 سنة تقريباً

(54)

3.43 (a)

5.32 ريال (b)

(55) سيارات:

20Å (a)

(b) بعد 11.3 سنة

(56) استثمار:

$$A(t) = 250000(1.035)^t$$

1432 (b)

(57) كيمياء

(a) 28 سنة

(b) 18Å

(58) زلزال

(a)

$$R = 0.67 \log(0.37 \times 1000000) + 1.46$$
$$R = 5.2$$

(b)

$$7.5 = 0.67 \log(0.37 E) + 1.46$$

$$6.04 = 0.67 \log(0.37 E)$$

$$\frac{6.04}{0.67} = \log(0.37 E)$$

$$9.014925373 = \log(0.37 E)$$

$$10^{9.014925373} = 0.37 E$$

$$E = 2797200834 \text{ كيلو واط في الساعة}$$

(59) احياء

$$G = \frac{t}{2.5 \log_b d}$$

$$6 = \frac{t}{2.5 \log_5 (3125)}$$

$$6 = \frac{t}{2.5(5)}$$

$$t = 75 \text{ سنة}$$

(60a) صوت

$$100 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

$$100 = \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)^{10}$$

$$10^{100} = \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)^{10}$$

$$I^{10} = 10^{-20}$$

$$I = 0.01$$

(b)

$$50 = \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)^{10}$$

$$\log 10^{50} = \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)^{10}$$

$$I^{10} = 10^{-70}$$

$$I = 10^{-7}$$

عند 50 ديسبل شدة الصوت الثاني 0.001 % من شدة الصوت الاول

(c)

$$d(I) = 10 \log \frac{I}{1 \times 10^{-12}}$$

$$d(I) = 10 \log \frac{1 \times 10^{-8}}{1 \times 10^{-12}}$$

$$d(I) = 10 \log \frac{2(1 \times 10^{-8})}{1 \times 10^{-12}}$$

$$d(2 \times 10^{-8}) = 43.01$$

مال(61a)

$$12000 = 8000e^{r(5)}$$

$$1.5 = e^{5r}$$

$$\log 1.5 = \log e^{5r}$$

$$r \approx 8.11 \%$$

(b)

$$12000 = 8000e^{5r}$$

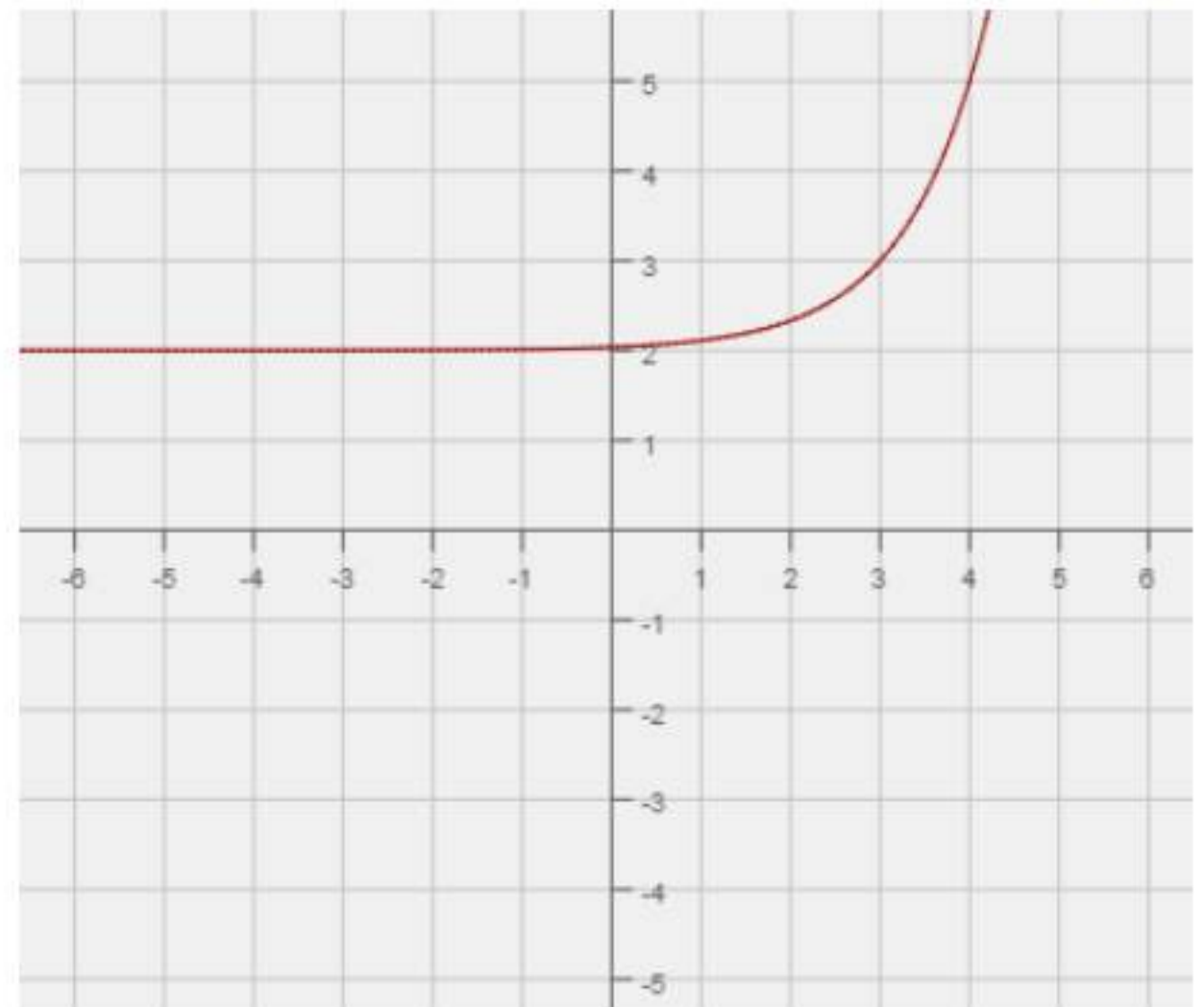
$$1.5 = e^{5r}$$

$$r = \frac{\log 1.5}{5}$$

$$r = 8.1$$

اختبار الفصل الثاني

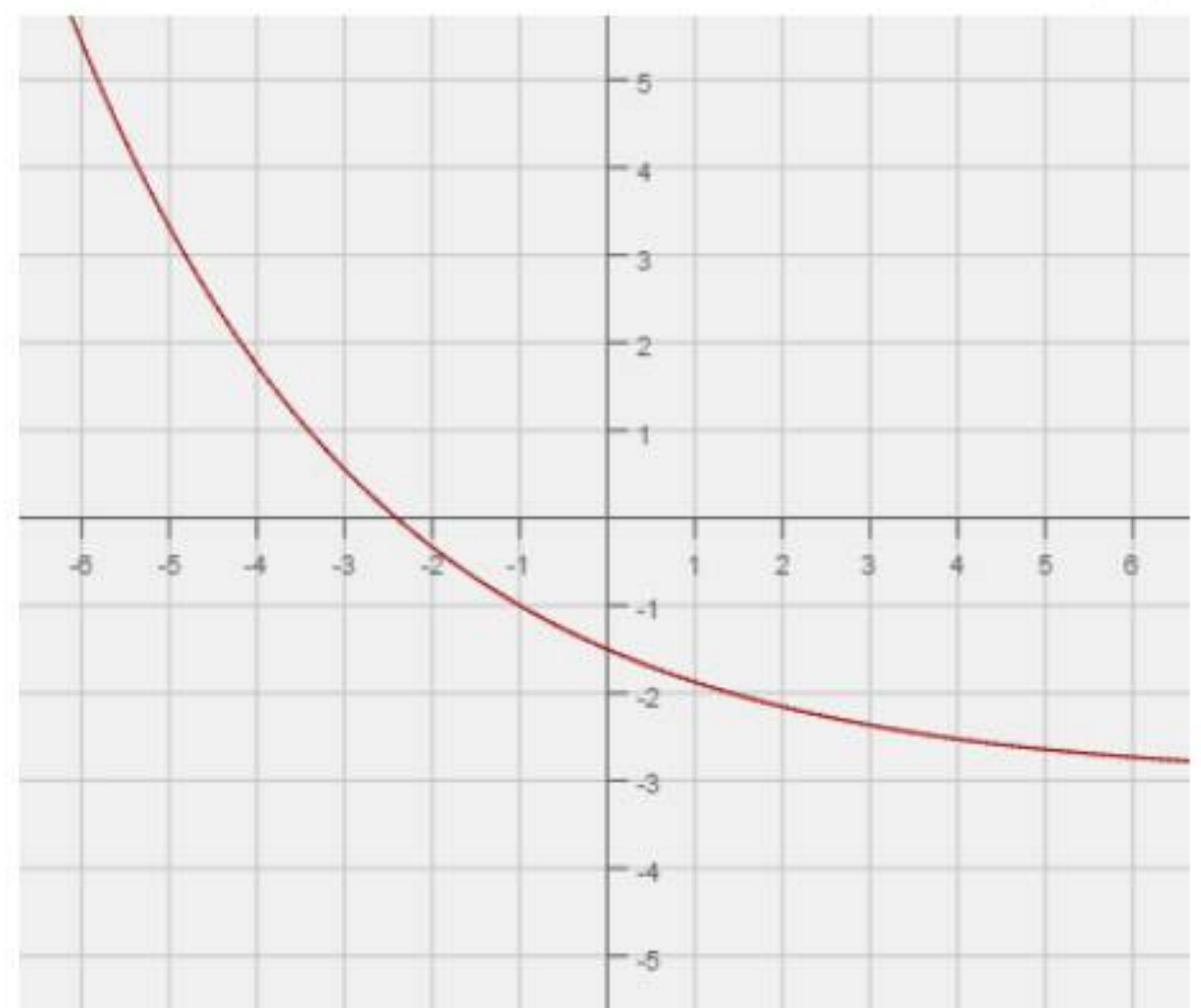
(1)



المجال: R

المدي: $\{y \mid y > 2\}$

(2)



المجال: R

المدي: $\{y \mid y > -3\}$

(3)

$$c = \frac{-9}{5}$$

(4)

$$x = \frac{4}{5}$$

(5)

$$a \approx 2.1130$$

(6)

$$x = 7$$

(7)

$$x = 25$$

(8)

$$x = 4$$

(9)

$$n = -2.9560$$

(10)

$$2.3513$$

(11)

$$1.0592$$

(12) سكان:

(a)

$$y = 185000(1.0212)^x$$

(b)

تقريباً 312566

(13)

$$9^{\frac{3}{2}} = 27$$

اختيار من متعدد:

(14) A

(15)

(a)

$$b < 1$$

(b)

تقريباً 2

(a)

$$y = 185000(1.0212)^x$$

(c)

تقريباً 2028

(16) توفير:

(a)

ريالاً تقريباً 8690

(b)

2.31 سنة تقريبا

(a)

$$y = 185000(1.0212)^x$$

(c)

3.2 سنوات تقريبا

اختيار من متعدد:

C (17)

اختيار من متعدد:

C (18)

(19)

$$\log_3 x^{-2} + \log_3 (z - 2)^6 + \log_3 t^2$$

$$\log_3 x^{-2} \cdot (z - 2)^6 \cdot t^2$$