

المثلثات المتطابقة

Congruent Triangles

الفصل 3

فيما سبق:

درست القطع المستقيمة
والزوايا والعلاقات بين
قياساتها.

والآن:

- أطبق العلاقات الخاصة
بالزوايا الداخلية والزوايا
الخارجية للمثلثات.
- حدد العناصر المتناظرة في
مثلثات متطابقة، وأبرهن
على تطابق المثلثات.
- أتعرف خصائص المثلثات
المتطابقة الضلعين
والمثلثات المتطابقة
الأضلاع.

لماذا؟

🌍 **لياقة:** تستعمل المثلثات
لتقوية إنشاءات ومعدات كثيرة،
من بينها أجهزة اللياقة البدنية
مثل هياكل الدراجات.



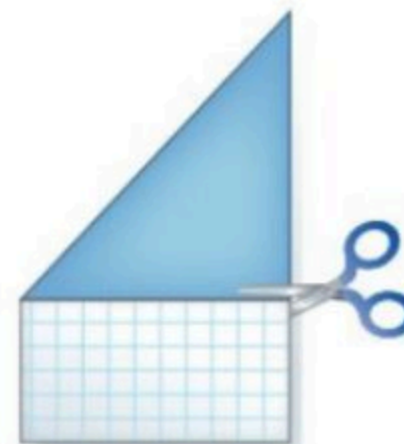
المطويات

منظم أفكار

المثلثات المتطابقة: اعمل المطوية التالية لتنظيم ملاحظتك حول المثلثات المتطابقة. ابدأ بثلاث أوراق رسم بياني وورقة مقواة من الحجم نفسه.

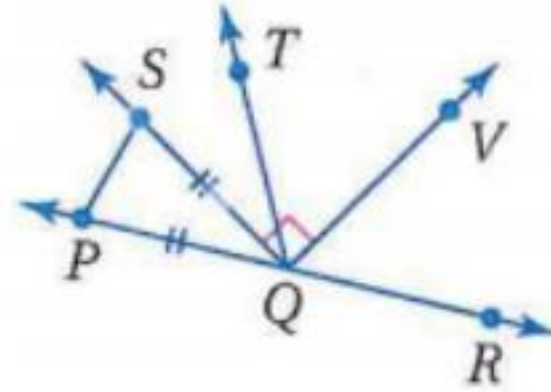


- 1 ضع أوراق الرسم البياني فوق الورقة المقواة، ثم اطلو الأوراق لتشكل مثلثاً، كما في الشكل، ثم قص الورق الزائد.
- 2 ثبّت الحافة، بحيث تشكل الأوراق دفترًا، واكتب عنوان الفصل في الصفحة الأولى، ورقم كل درس وعنوانه في باقي الصفحات.





صنف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادة أو منفرجة:



(1) $\angle VQS$ زاوية قائمة

(2) $\angle TQV$ زاوية حادة

(3) $\angle PQV$ زاوية منفرجة

(4) تصاميم ورقية:

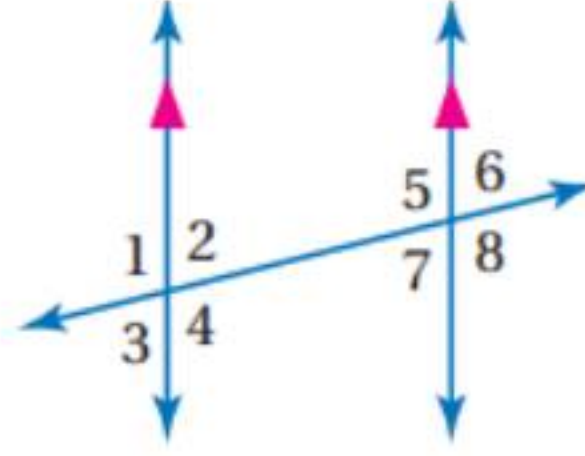


1 $\angle$ قائمة

2 $\angle$ حادة

3 $\angle$ منفرجة

جبر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغير المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:



5)

$$\angle 3 = \angle 6$$

$$x - 12 = 72$$

$$x = 72 + 12$$

$$x = 84^\circ$$

$\angle 3, \angle 6$ متبادلتين خارجياً.

6)

$$\angle 4 = \angle 5$$

$$2y + 32 = 3y - 3$$

$$-y = -3 - 32$$

$$y = 35^\circ$$

$\angle 4, \angle 5$ متبادلتين داخلياً.

أوجد المسافة بين النقطتين في كل مما يأتي:

7)

$$X(-2, 5), Y(1, 11)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (11 - 5)^2}$$

$$\sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} \approx 6.7$$

المسافة بين النقطتين $x, y = 6.7$ وحدة

8)

$$R(8,0), S(-9,6)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-9 - 8)^2 + (6 - 0)^2}$$

$$\sqrt{289 + 36} = \sqrt{325} \approx 18.02$$

المسافة بين النقطتين $r, s = 18.02$ وحدة

خرائط:

9)

$$(0,0), (5,2.2)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 0)^2 + (2.2 - 0)^2}$$

$$\sqrt{25 + 4.84} = \sqrt{29.84} \approx 5.46$$

$$5.46 \times 35 = 191.1km$$

تصنيف المثلثات

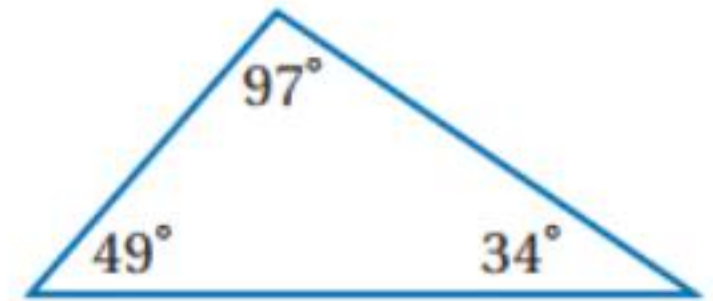
3-1

تلقّق

صفحة ١٤١

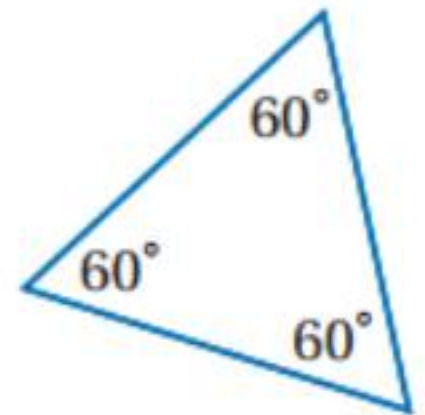
صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

(1A)



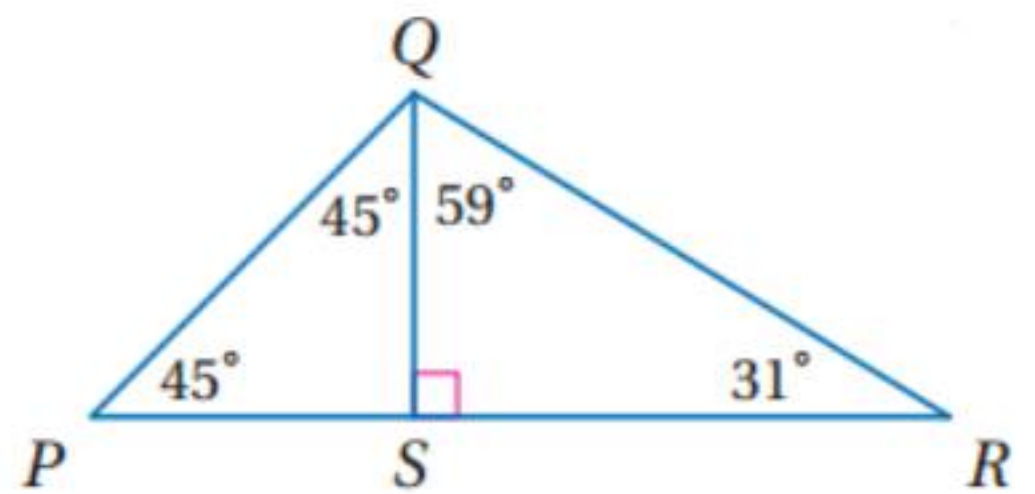
مثلث منفرج الزاوية لأنه يحتوي على زاوية 97°

(1B)



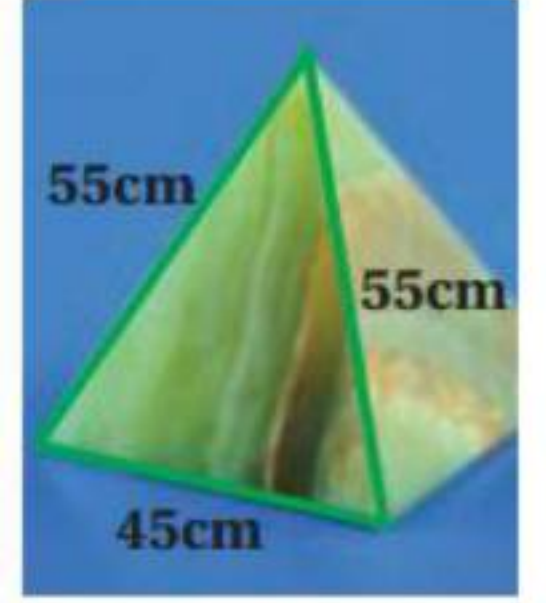
مثلث متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية.

(2)



مثلث قائم الزاوية ، لأن الزاوية PQS قائمة $90^\circ = 45 + 45$

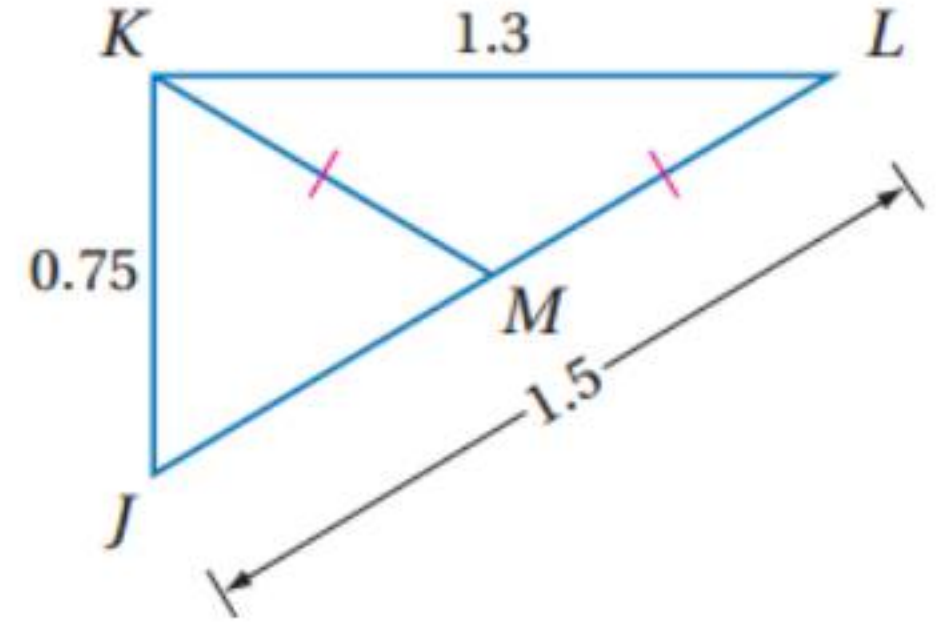
(3) قيادة السيارة والسلامة:



شكل زر ضوء الخطر مثلث متطابق الضلعين.

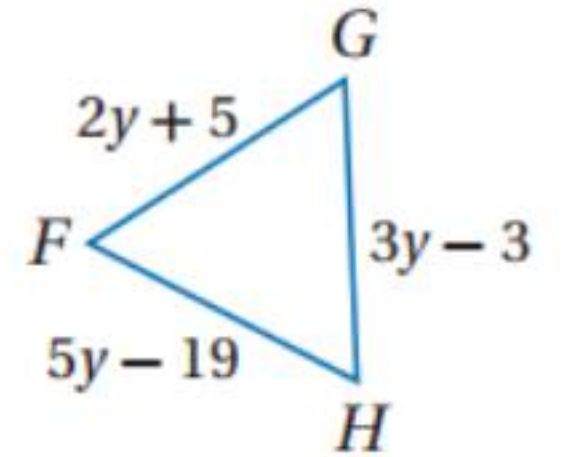


(4)



$\triangle KML$ متطابق الضلعين لأن $KM = ML$

(5)



بما أن المثلث متطابق الأضلاع إذن أطوال أضلاعه جميعها متساوية

$$FG = GH$$

$$2y + 5 = 3y - 3$$

$$2y + 5 - 3y + 3 = 0$$

$$-y + 8 = 0$$

$$y = 8$$

$$FG = 2y + 5 = 2 \times 8 + 5 = 21$$

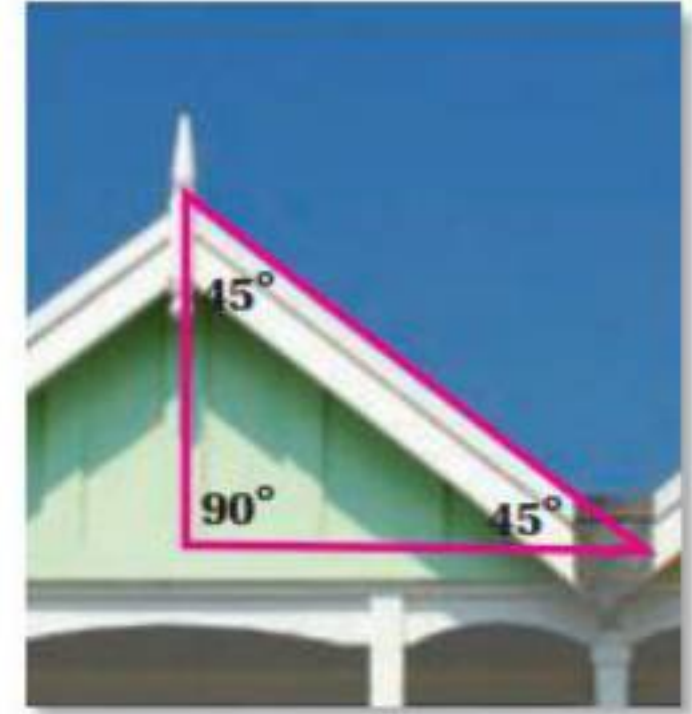
$$GH = 3y - 3 = 3 \times 8 - 3 = 21$$

$$FH = 5y - 19 = 5 \times 8 - 19 = 21$$

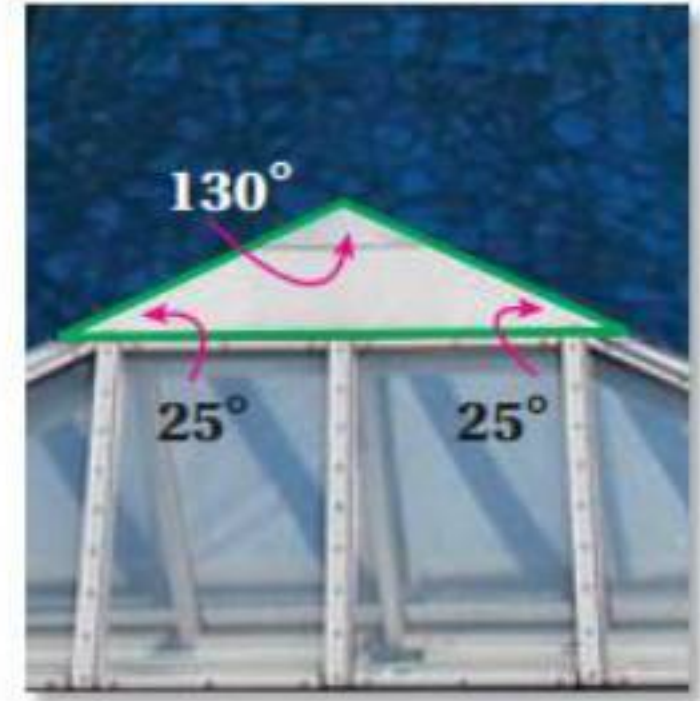


فن العمارة: المثال ١

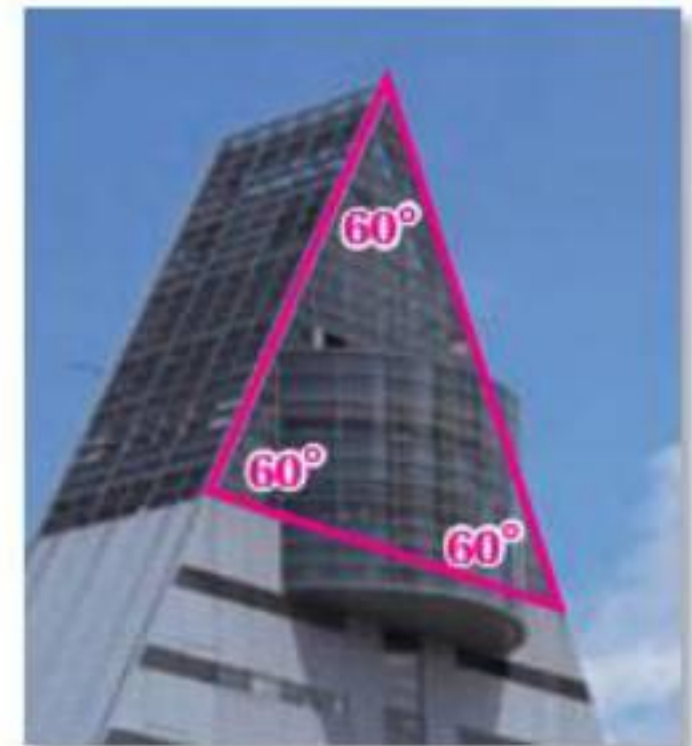
(1) قائم الزاوية لأنه يحتوي على زاوية قياسها 90°



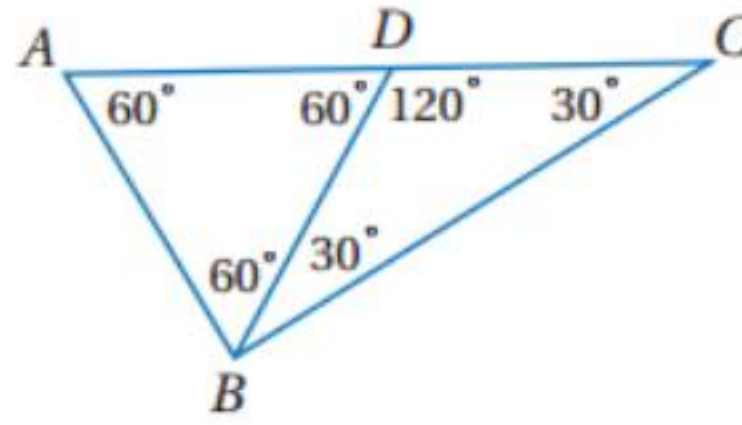
(2) منفرج الزاوية لأن إحدى زواياه أكبر من 90°



(3) متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية



صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: المثال ٢



(4) $\triangle ABD$ متطابق الزوايا، قياس كل زاوية = 60

(5) $\triangle BDC$ منفرج الزاوية، $\triangle ABD$

(6) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، لأن $90^\circ = m\angle BDC$

صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع: المثال ٣

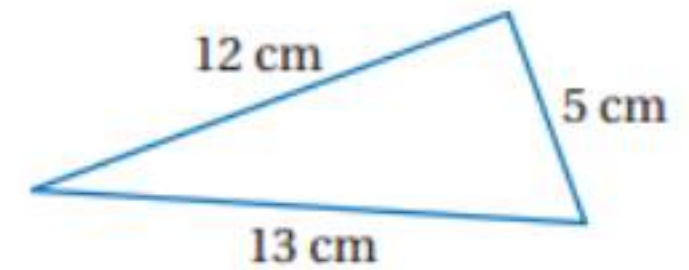
(7)

متطابق الضلعين

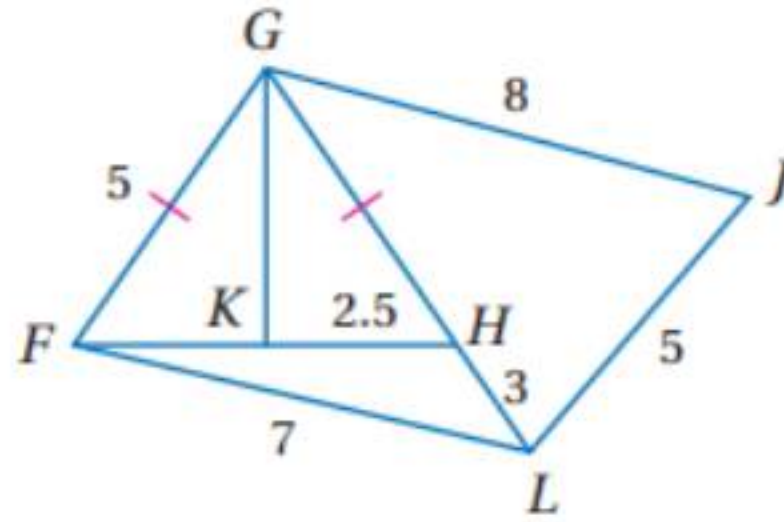


(8)

مختلف الأضلاع



إذا كانت النقطة K هي منتصف $\overline{FH}$ ، فصنف كلا من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع: مثال؛



(9)

بما أن K في المنتصف، إذن $2.5 = FK = KH$

$$5 = 2.5 + 2.5 = FH$$

$$5 = FH = FG = HG$$

إذن المثلث $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع لأن جميع أضلاعه متساوية.

(10)

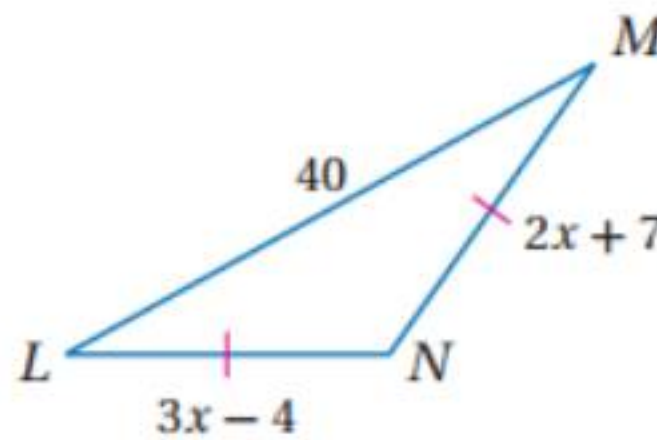
بما أن $5 = LJ = GL$ إذن $\triangle GJL$ متطابق الضلعين

(11)

بما أن $\triangle FHL$ جميع أطوال أضلاعه غير متساوية إذن هو مختلف الأضلاع

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كل من المثلثين الآتين:

(12)



بما أن المثلث $\triangle LNM$ متطابق الضلعين إذن $LN = MN$

$$LN = MN$$

$$2x + 7 = 3x - 4$$

$$2x - 3x = -4 - 7$$

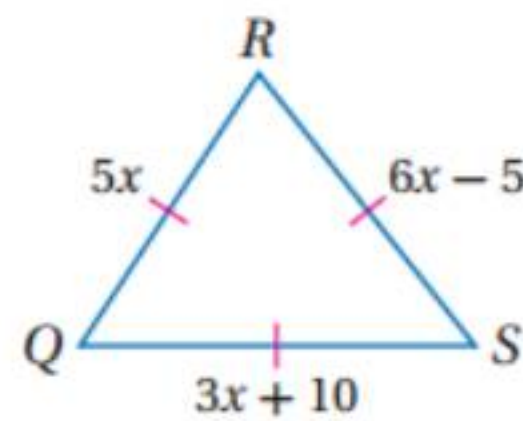
$$-x = -11$$

$$x = 11$$

$$MN = 2 \times 11 + 7 = 29$$

$$LN = 3 \times 11 - 4 = 29$$

(13)



بما أن المثلث $\triangle QRS$ متطابق الأضلاع إذن $RS = QS = QR$

$$6x - 5 = 5x$$

$$6x - 5x = 5$$

$$x = 5$$

$$QR = 5x = 5 \times 5 = 25$$

$$RS = 6x - 5 = 6 \times 5 - 5 = 25$$

$$QS = 3x + 10 = 3 \times 5 + 10 = 25$$

(14) مجوهرات:

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن:

$$(4x - 0.8) = (3x + 0.2)$$

$$x = 0.8 + 0.2 = 1$$

لتشكيل قرط واحد أحتاج إلى :

$$(4x - 0.8) + (3x + 0.2) + (2x + 0.1) + 1.5 =$$

$$9x - 0.5 = 9 - 0.5$$

$$= 8.5$$

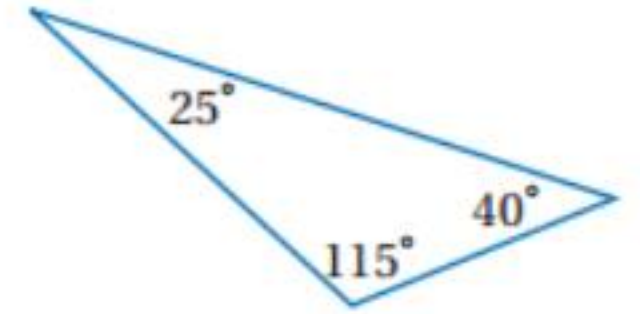
إذن يمكن صنع قرط واحد سلك طوله ٨,٥

تدرب وحل المسائل

صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: المثال ١

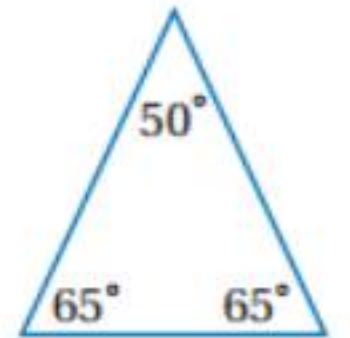
(15)

منفرج الزاوية لأنه يحتوي على زاوية أكبر من 90°



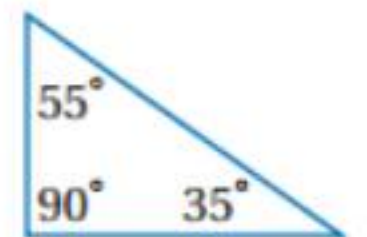
(16)

حاد الزوايا لأن جميع زواياه أقل من 90°

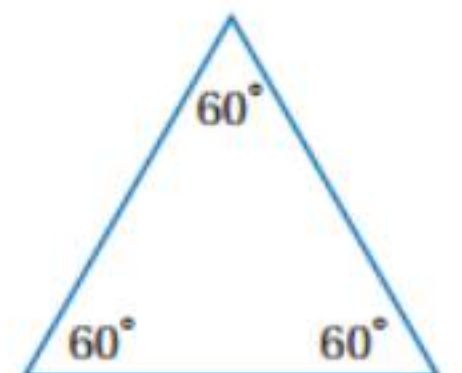


(17)

قائم الزاوية لأنه توجد زاوية قائمة $= 90^\circ$



(18)



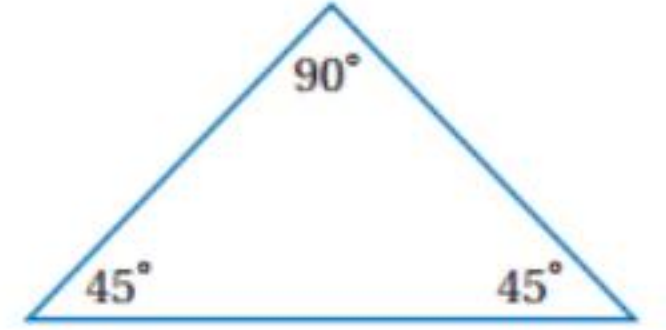
متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية

(19)



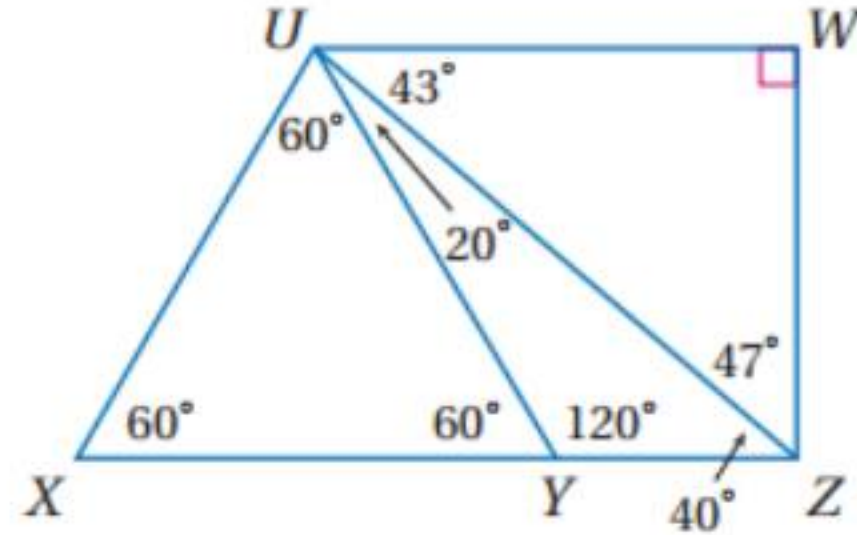
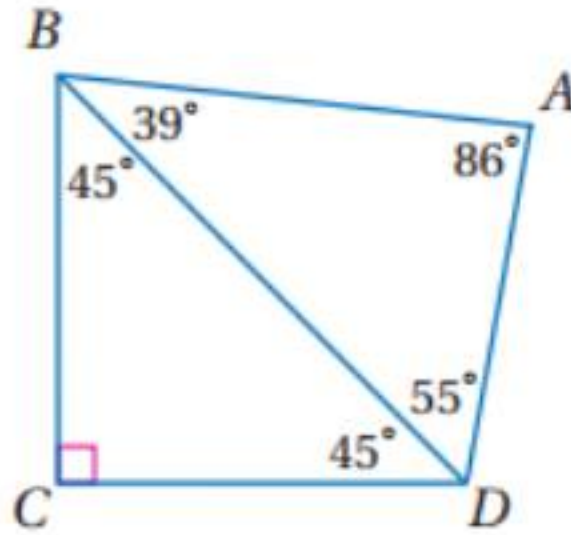
حاد الزوايا لأن جميع زواياه أقل من 90°

(20)



قائم الزاوية لأنه توجد زاوية قائمة $= 90^\circ$

صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: المثال ٢



(21) $\triangle UYZ$ منفرج الزاوية، لأنه يحتوي زاوية أكبر من 90° وهي

$$120^\circ = \angle UYZ$$

(22) $\triangle BCD$ قائم الزاوية، لأنه يوجد زاوية قائمة $= 90^\circ$

(23) $\triangle BCD$ حاد الزوايا، لأن جميع زواياه أقل من 90°

(24) $\triangle UXZ$ حاد الزوايا، لأن جميع زواياه أقل من 90°

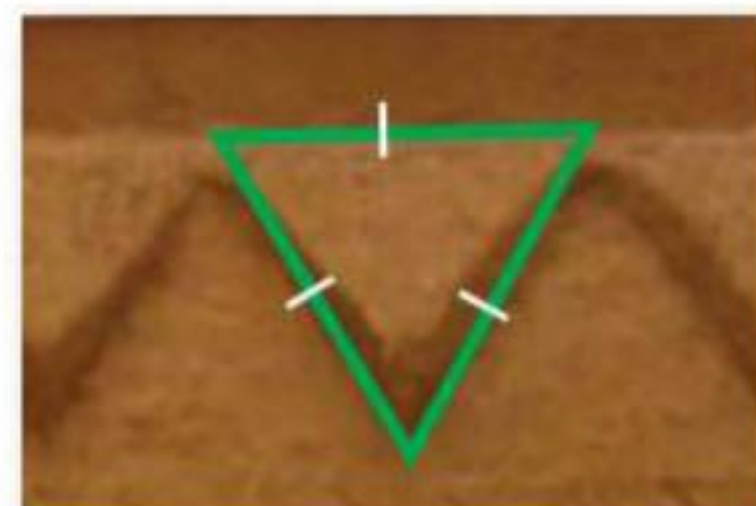
(25) $\triangle UWZ$ قائم الزاوية، لأنه يوجد زاوية قائمة $= 90^\circ$

(26) $\triangle UXY$ متطابق الزوايا، جميع زواياه متساوية.

صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع: المثال ٣

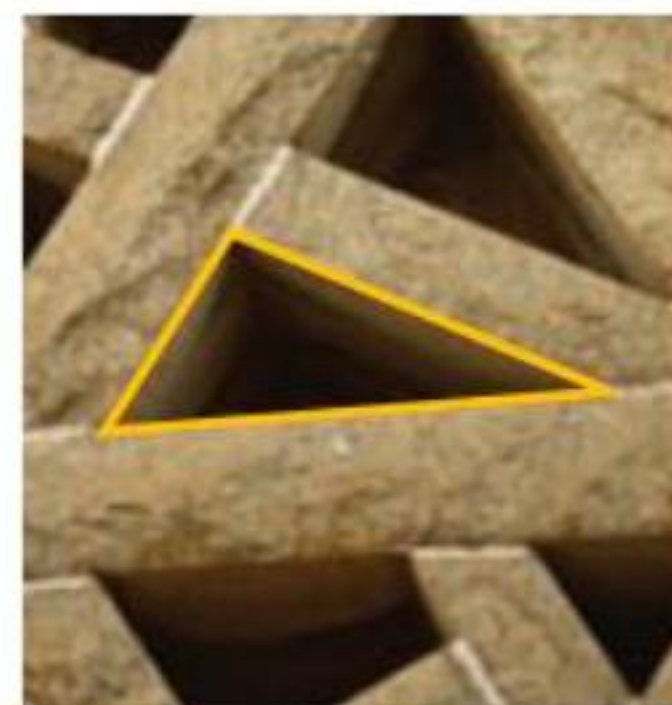
(27)

متطابق الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه متساوية.

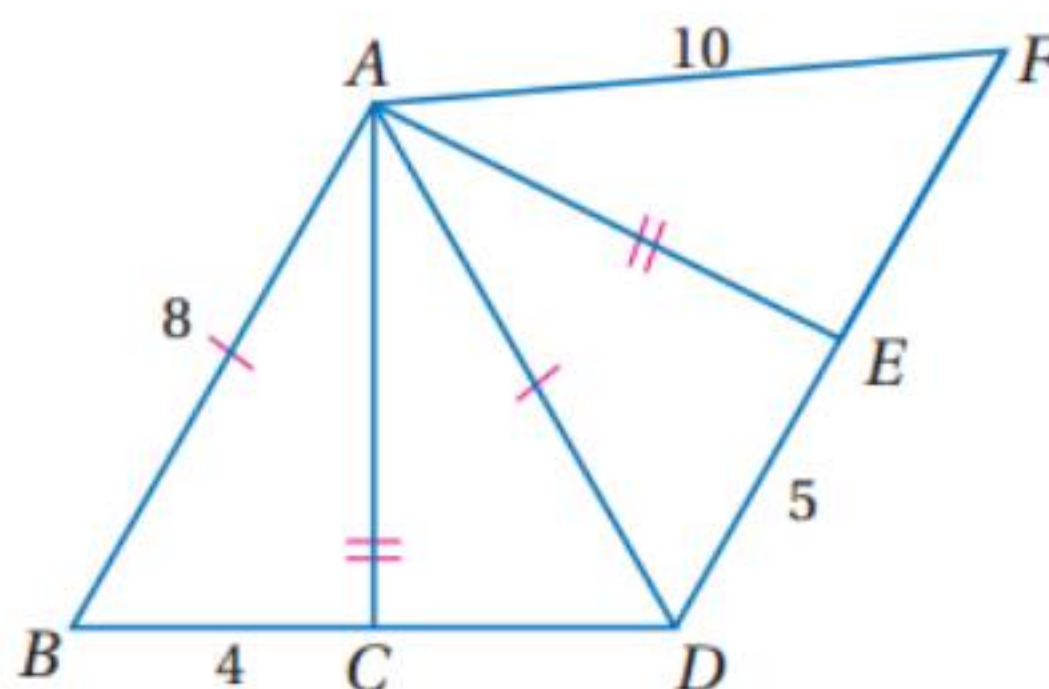


(28)

مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.



إذا كانت C هي منتصف $\overline{BD}$ ، والنقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، فصنف كلا من المثلثات الآتية إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:



بما أن C هي نقطة منتصف $\overline{BD}$ إذن $\overline{CD} = \overline{BC}$ $4 = \overline{CD} = \overline{BC}$

وبما أن النقطة E منتصف $\overline{DF}$ إذن $\overline{ED} = \overline{EF}$ $5 = \overline{ED} = \overline{EF}$

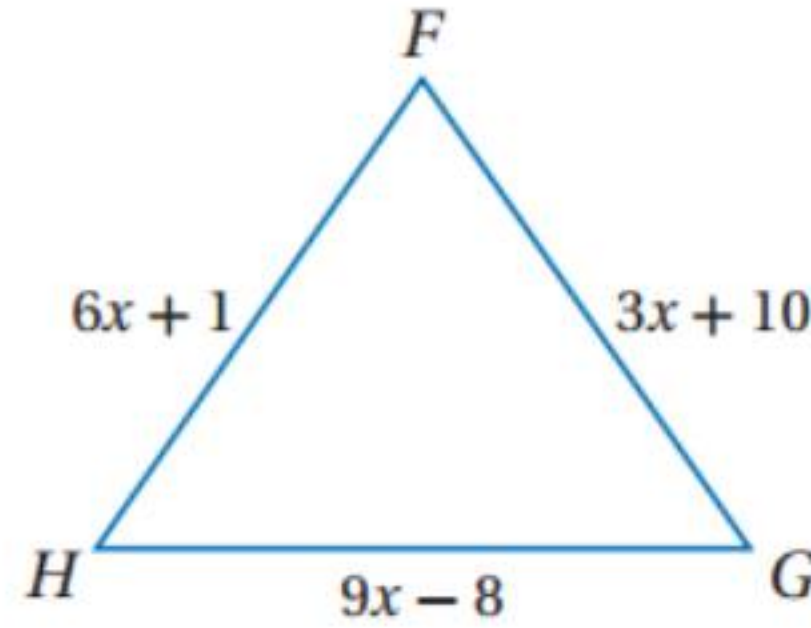
(29) $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

(30) $\triangle ADF$ متطابق الضلعين لأن $\overline{AF} = \overline{FD}$ $10 = \overline{AF} = \overline{FD}$.

(31) $\triangle ACD$ مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

(32) $\triangle ABD$ متطابق الضلعين لأن $\overline{AB} = \overline{AD}$ $8 = \overline{AB} = \overline{AD}$

(33) جبر: المثال



بما أن المثلث متطابق الأضلاع إذن جميع أطوال أضلاعه متساوية.

$$\overline{HF} = \overline{FG}$$

$$6x + 1 = 3x + 10$$

$$6x - 3x = 10 - 1$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

$$\overline{HF} = 6x + 1 = 6 \times 3 + 1 = 19$$

$$\overline{FG} = 3x + 10 = 3 \times 3 + 10 = 19$$

$$\overline{HG} = 9x - 8 = 9 \times 3 - 8 = 19$$

(34) فن تشكيلي:



1 Δ : حاد الزوايا متطابق الضلعين

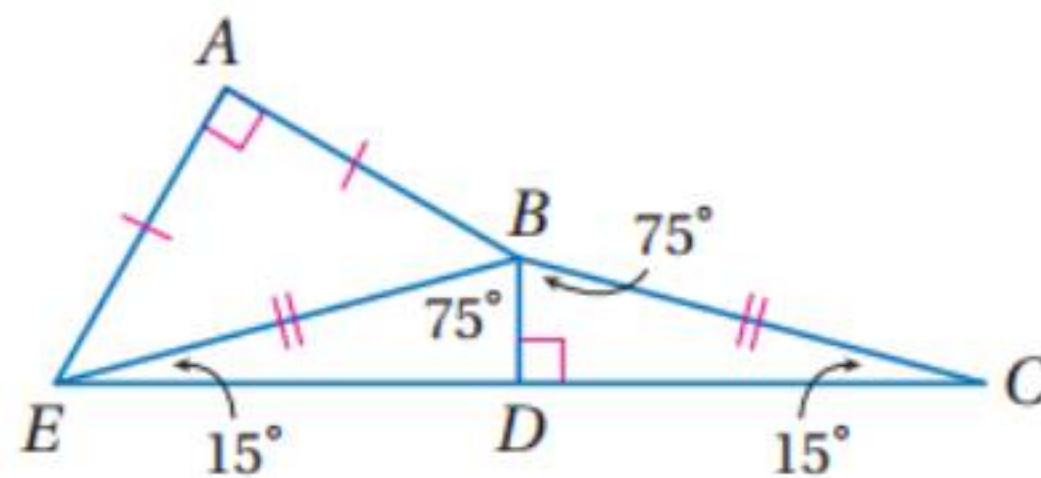
2 Δ : قائم الزاوية مختلف الأضلاع

3 Δ : منفرج الزاوية مختلف الأضلاع

4 Δ : حاد الزوايا متطابق الأضلاع

5 Δ : منفرج الزاوية مختلف الأضلاع

صنف كلا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:



(35) ΔABE قائم الزاوية لأن $\angle BAE = 90^\circ$ ومتطابق الضلعين لأن $\overline{AB} = \overline{AE}$

(36) ΔEBC منفرج الزاوية لأن $\angle EBC = 150^\circ$ ومتطابق الضلعين $\overline{BC} = \overline{BE}$

(37) ΔBDC قائم الزاوية ومختلف الأضلاع

38)

$$X (-5,9), Y (2,1), Z (-8,3)$$

$$X (-5,9), Y (2,1)$$

$$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-5))^2 + (1 - 9)^2}$$

$$\sqrt{49 + 64} = \sqrt{113}$$

$$Y (2,1), Z (-8,3)$$

$$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-8 - 2)^2 + (3 - 1)^2}$$

$$\sqrt{100 + 4} = \sqrt{104}$$

$$X (-5,9), Z (-8,3)$$

$$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-8 - (-5))^2 + (3 - 9)^2}$$

$$\sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

المثلث XYZ مختلف الأضلاع لأن جميع أطواله غير متساوية.

39)

$X (7,6), Y (5,1), Z (9,1)$

$X (7,6), Y (5,1)$

$$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-7)^2 + (1-6)^2}$$

$$\sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$Y (5,1), Z (9,1)$

$$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(9-5)^2 + (1-1)^2}$$

$$\sqrt{16+0} = \sqrt{4}$$

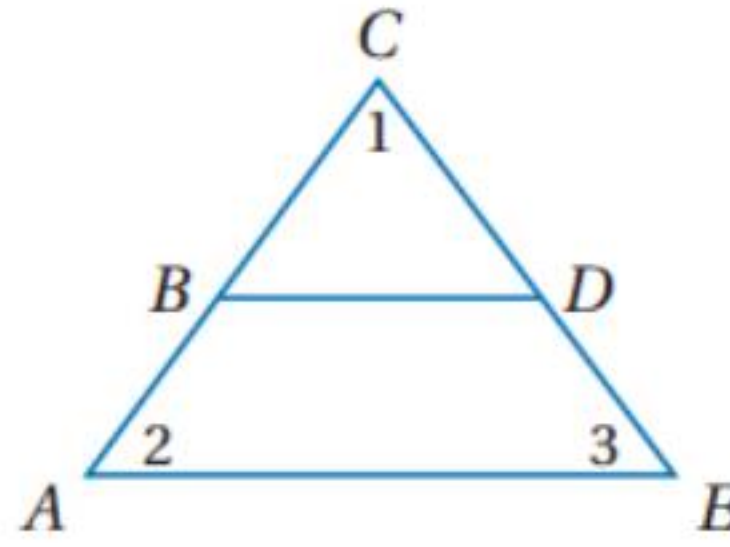
$X (7,6), Z (9,1)$

$$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(9-7)^2 + (1-6)^2}$$

$$\sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

المثلث XYZ متطابق الضلعين لأن $\overline{XZ} = \overline{XY}$

(40) برهان:



(1) $\triangle ACE$ متطابق الزوايا و $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ (معطيات)

(2) $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$ (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

(3) $\angle 2 \cong \angle CBD$ و $\angle 3 \cong \angle CDB$ (مسلمة الزاويتين المتناظرتين)

(4) $\angle 1 \cong \angle CBD \cong \angle CDB$

(5) $\triangle BCD$ متطابق الزوايا (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

جبر: أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كل مما يأتي:

(41)

$\triangle FGH$ متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية

$$HF = GH$$

$$x + 20 = 2x + 5$$

$$x - 2x = 5 - 20$$

$$-x = -15$$

$$x = 15$$

$$HF = x + 20 = 15 + 20 = 35$$

$$GH = 2x + 5 = 2 \times 15 + 5 = 35$$

$$FG = 3x - 10 = 3 \times 15 - 10 = 35$$

(42)

ΔRST متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية

$$RS = 4x + 3$$

$$ST = 2x + 7$$

$$TR = 5x + 1$$

$$RS = ST$$

$$4x + 3 = 2x + 7$$

$$4x - 2x = 7 - 3$$

$$2x = 4$$

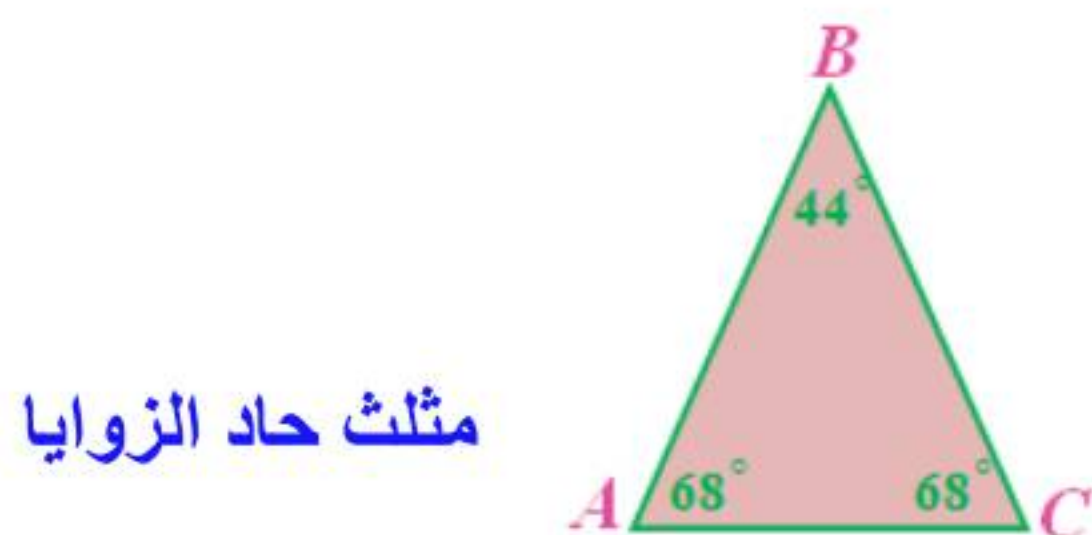
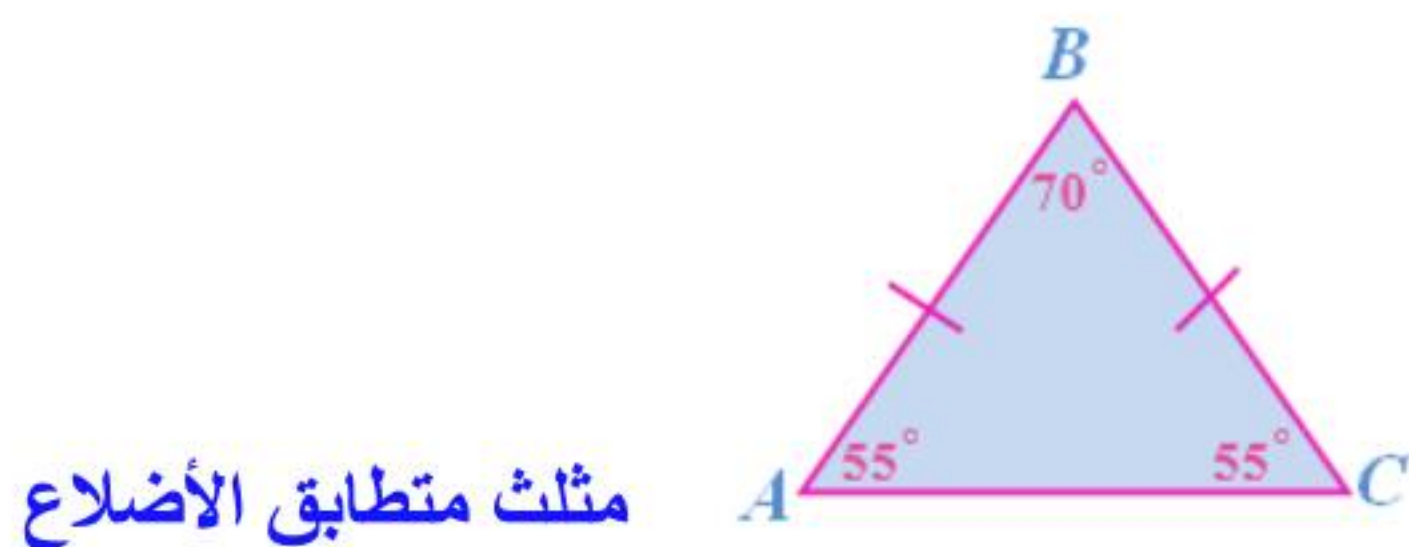
$$x = 2$$

$$RS = 4x + 3 = 4 \times 2 + 3 = 11$$

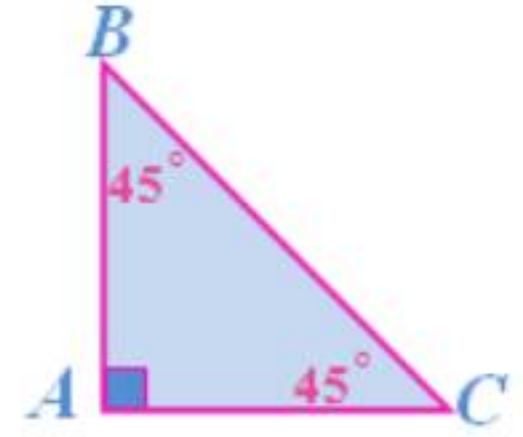
$$ST = 2x + 7 = 2 \times 2 + 7 = 11$$

$$TR = 5x + 1 = 5 \times 2 + 1 = 11$$

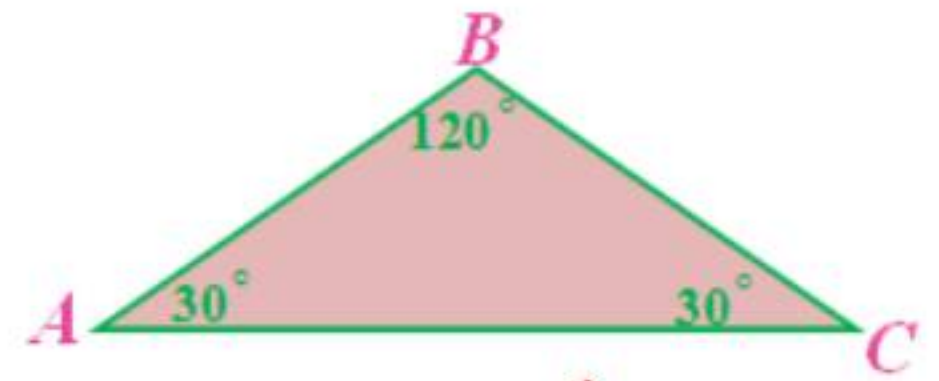
(43) تمثيلات متعددة: a) هندسيا:



مثلث قائم الزاوية



مثلث منفرج الزاوية



(b) جدولياً:

$m \angle A$	$m \angle C$	$m \angle B$	مجموع قياسات الزوايا
٥٥	٥٥	٧٠	١٨٠
٦٨	٦٨	٤٤	١٨٠
٤٥	٤٥	٩٠	١٨٠
٣٠	٣٠	١٢٠	١٨٠

(c) لفظياً: الزاويتان المقابلتان للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، ومجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي 180°

(d) جبرياً:

إذا كان للزاويتين المقابلتين للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين القياس نفسه وكان قياس إحداهما x ، فإن قياس الأخرى يساوي x وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي 180° فإن قياس الزاوية الثالثة يساوي $180 - 2x$

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٤) اكتشف الخطأ:

ليلى إجابتها صحيحة، في أي مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل لذا فبحسب كلام نوال فإن جميع المثلثات تصنف على أنها حادة الزوايا، وهذا غير صحيح، حيث تصنف المثلثات وفقا للزاوية الثالثة. فإذا كانت الزاوية الثالثة حادة، فالمثلث حاد الزوايا وإذا كانت منفرجة، فالمثلث منفرج الزاوية.

تبرير:

٤٥) غير صحيحة أبداً، جميع المثلثات المتطابقة الزوايا فيها ثلاثة زوايا قياس كل منها 60 ولذلك فإنها لا تحتوى زاوية قياسها 90 فلا يمكن أن تكون قائمة الزاوية.

٤٦) صحيحة دائماً، المثلث المتطابق الأضلاع فيه ثلاثة أضلاع لها الطول نفسه والمثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان على الأقل لهما الطول نفسه ولذا فإن جميع المثلثات المتطابقة الأضلاع تكون متطابقة الضلعين أيضاً

٤٧) تحد:

بما أن المثلث متطابق الأضلاع فإن أطوال أضلاعه متساوية ويكون محيط المثلث المتطابق الأضلاع هو مجموع أطوال أضلاعه أو ثلاثة أمثال طول احد أضلاعه إذن محيط المثلث $= 3 \times 23 = 69$

$$7x - 5 = 5x + 3$$

$$7x - 5x = 3 + 5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$7x - 5 = 7 \times 4 - 5 = 23$$

48) اكتب:

في المثلث الحاد الزوايا ثلاثة زوايا حادة والمثلث المتطابق الزوايا فيه ثلاث زوايا قياس كم منها 60 وبما أن الزوايا التي قياسها 60 هي زوايا حادة فإن جميع المثلثات المتطابقة الزوايا هي مثلثات حادة الزوايا.

تدريب على الاختبار المعياري

49) C

$$84.50 \times \frac{40}{100} = 33.8$$

50) D

$$2x + y = 5$$

$$y = 5 - 2x$$

$$m = -2$$

مراجعة تراكمية

اوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين في كل مما يأتي:

51)

$$(-2, 0), (5, 0)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{49} = 7$$

52)

رسم مستقيم عمودي على المستقيمين المتوازيين ويمر بالنقطة $(0, -4)$ وميله -1

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \rightarrow y + 4 = -1(x - 0)$$

$$y = -x - 4$$

$$-x - 4 = x + 2$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

$$y = -x - 4$$

$$y = -(-3) - 4$$

$$y = -1$$

$$(-3, -1), (0, -4)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (-4 - (-1))^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

(53) كرة قدم: المستقيمان العموديان على مستقيم آخر متوازيان.

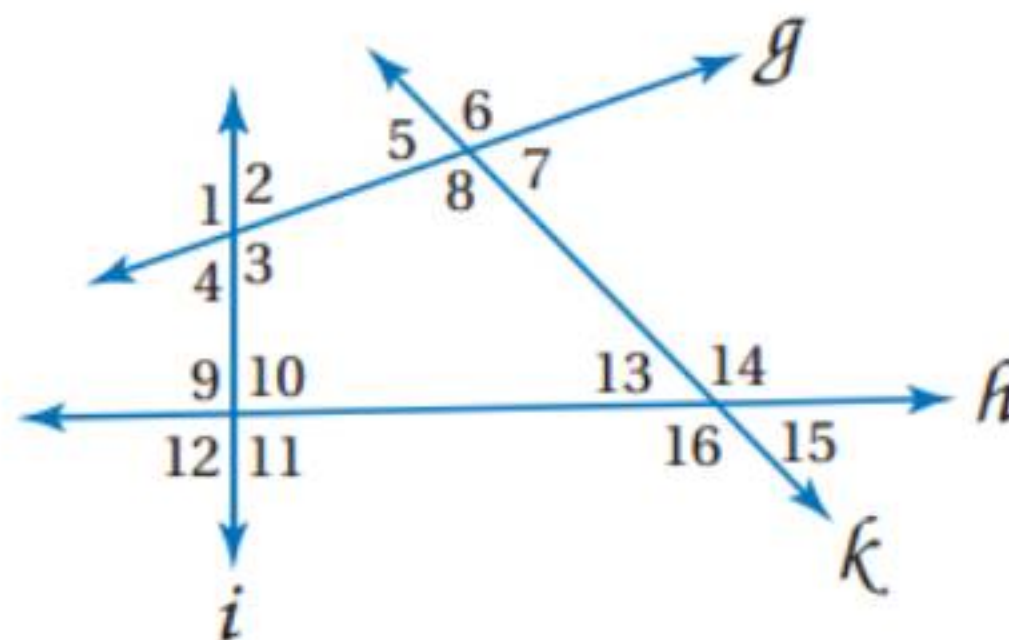
حدد الفرض والنتيجة في كل جملة شرطية فيما يأتي:

(54) الفرض: كون الرجل كهلاً ، النتيجة: عمره 40 سنة على الأقل

(55) الفرض: $2x + 6 = 10$ ، النتيجة: $x = 2$

استعد للدرس اللاحق

صنف كل زوج من الزوايا مما يأتي إلى متبادلتين داخليا أو متبادلتين خارجيا أو متناظرتين أو متخالفتين:



(56) $\angle 3, \angle 5$: متبادلتان داخليا

(57) $\angle 4, \angle 9$: متحالفتان داخليا

(58) $\angle 13, \angle 11$: متبادلتان داخليا

(59) $\angle 11, \angle 1$: متبادلتان خارجيا

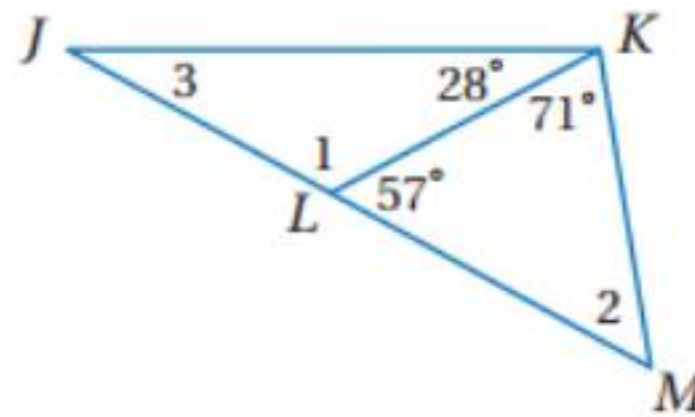
حلل النتائج:

- (1) زاوية مستقيمة أو خط مستقيم
- (2) 180°
- (3) $m \angle A + m \angle B$ يساوي قياس الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle C$
- (4) تختلف إجابات الطالب.
- (5) قياس الزاوية الخارجية يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين غير المجاورتين لها.

زوايا المثلثات



(1A)



مجموع قياسات زوايا المثلث ΔJKL و $\Delta LKM = 180^\circ$

والزاويتان المتجاورتان على مستقيم $= 180^\circ$

ΔLKM

$$71^\circ + 57^\circ + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\angle 2 = 180^\circ - 128$$

$$\angle 2 = 52^\circ$$

$$\angle 1 = 180^\circ - 57^\circ$$

$$\angle 1 = 123^\circ$$

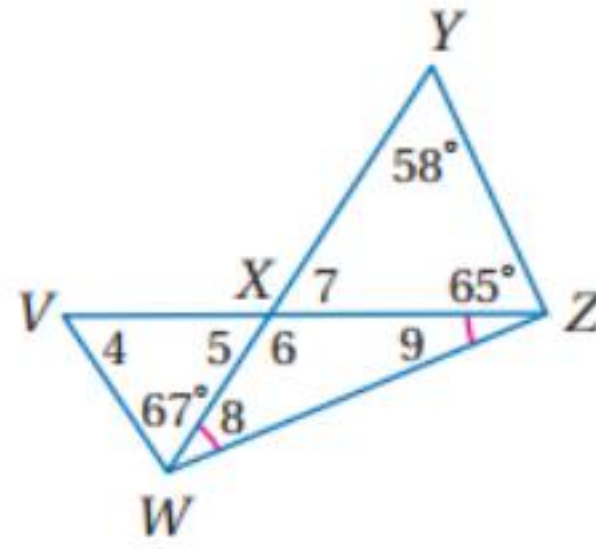
ΔJKL

$$28^\circ + 123^\circ + \angle 3 = 180^\circ$$

$$\angle 3 = 180^\circ - 151^\circ$$

$$\angle 3 = 29^\circ$$

(1B)



$\triangle XYZ$

$$58^\circ + 65^\circ + \angle 7 = 180^\circ$$

$$123^\circ + \angle 7 = 180^\circ$$

$$\angle 7 = 57^\circ$$

$$\angle 7 = \angle 5 = 57^\circ$$

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

$\triangle VWX$

$$67^\circ + 57^\circ + \angle 4 = 180^\circ$$

$$124^\circ + \angle 4 = 180^\circ$$

$$\angle 4 = 56^\circ$$

$$\angle 6 = 180^\circ - \angle 7$$

$$\angle 6 = 180^\circ - 57^\circ$$

زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$\angle 6 = 123^\circ$$

$$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 9 + \angle 8)$$

$$123^\circ = 180^\circ - (\angle 9 + \angle 8)$$

$$\angle 9 = \angle 8$$

$$123^\circ = 180^\circ - (\angle 8 + \angle 8)$$

$$123^\circ = 180^\circ - 2\angle 8$$

$$2\angle 8 = 180^\circ - 123^\circ$$

$$2\angle 8 = 57^\circ$$

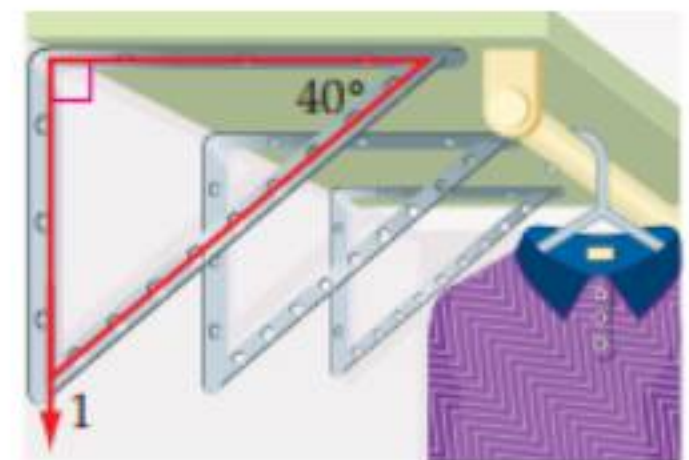
$$\angle 8 = 57^\circ \div 2$$

$$\angle 8 = 28.5^\circ$$

$$\angle 9 = 28.5^\circ$$



(2) تنظيم خزانة الملابس

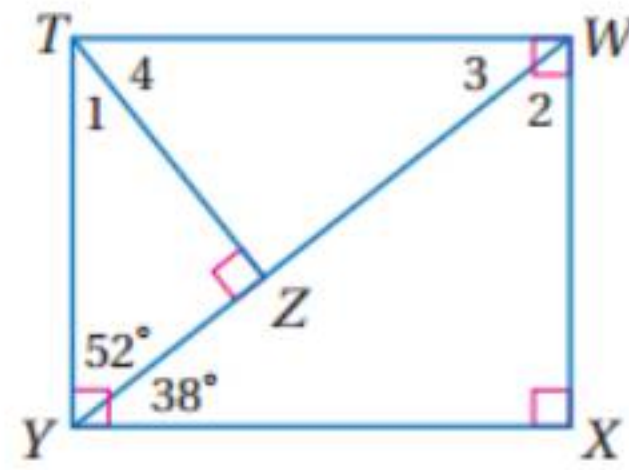


الزاوية الخارجة عن المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخلتين البعديتين (نظرية الزاوية الخارجة)

$$\angle 1 = 90^\circ + 40^\circ$$

$$\angle 1 = 130^\circ$$

3A)



$$\angle 2 + \angle WYX = 90^\circ$$

زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

$$\angle 2 + 38^\circ = 90^\circ$$

$$\angle 2 = 52^\circ$$

3B)

$$\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\angle 3 + 52^\circ = 90^\circ$$

$$\angle 3 = 90^\circ - 52^\circ$$

$$\angle 3 = 38^\circ$$

3C)

$$\angle 4 + \angle 3 = 90^\circ$$

زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

$$\angle 4 + 38^\circ = 90^\circ$$

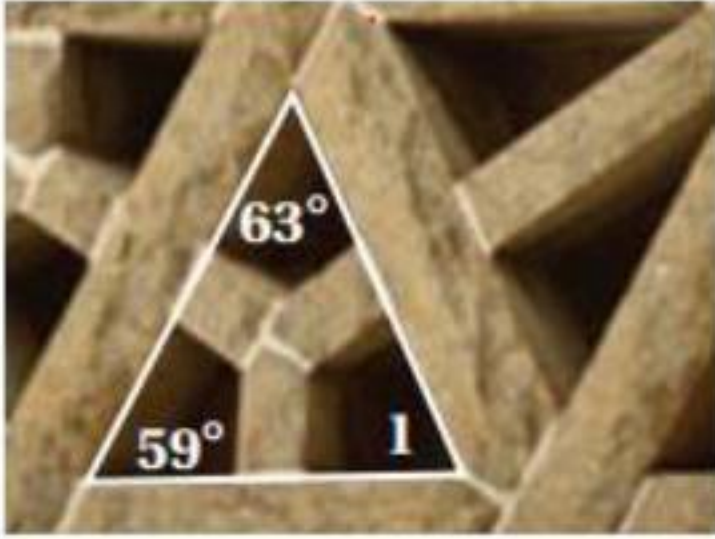
$$\angle 4 = 90^\circ - 38^\circ$$

$$\angle 4 = 52^\circ$$



أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين: المثال ١

1)

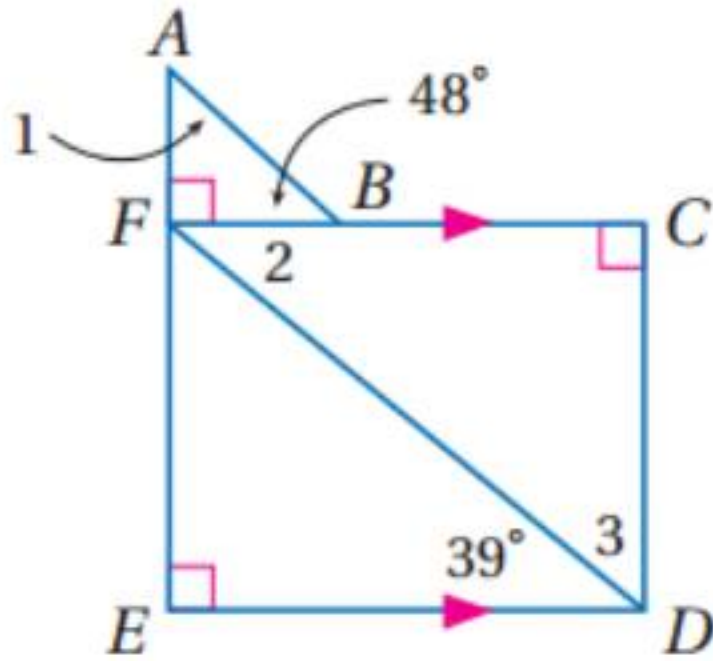


بما أن زوايا المثلث الداخلة = 180° إذن:

$$\angle 1 = 180^\circ - (63^\circ + 59^\circ)$$

$$\angle 1 = 58^\circ$$

2)



$$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 48^\circ)$$

$$\angle 1 = 42^\circ$$

$$\angle 2 = 39^\circ$$

نظرية الزاويتان المتبادلتان داخلياً

$$\angle 3 = 90^\circ - 39^\circ$$

$$\angle 3 = 51^\circ$$

كراسي الشاطئ: المثال ٢



3)

$$\angle 2 + 53^\circ = 102^\circ$$

$$\angle 2 = 102^\circ - 53^\circ$$

$$\angle 2 = 49^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

4)

$$\angle 4 = 180 - 53^\circ$$

$$\angle 4 = 127^\circ$$

5)

$$\angle 1 = 180^\circ - 102^\circ$$

$$\angle 1 = 78^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة 180°

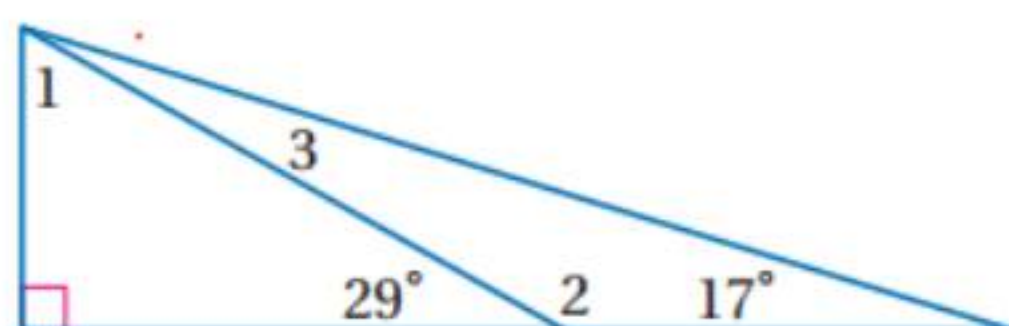
6)

$$\angle 3 = 180 + \angle 2$$

$$\angle 3 = 180^\circ + 49^\circ$$

$$\angle 3 = 131^\circ$$

معتمدا على الشكل المجاور أوجد القياسات التالية:



7)

$$\angle 1 = 180 - (90^\circ + 29^\circ)$$

$$\angle 1 = 61^\circ$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

8)

$$\angle 1 + \angle 3 = 180 - (90^\circ + 17^\circ)$$

$$61^\circ + \angle 3 = 73^\circ$$

$$\angle 3 = 12^\circ$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

9)

$$\angle 2 = 180 - (\angle 3 + 17^\circ)$$

$$\angle 2 = 180 - (12^\circ + 17^\circ)$$

$$\angle 2 = 151^\circ$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

تدرب وحل المسائل

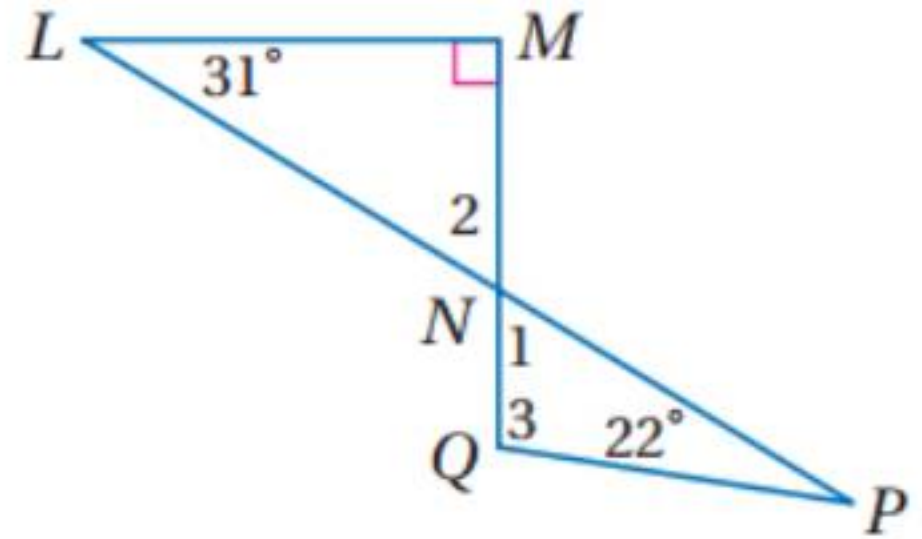
أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين:

10)

$$\angle 1 = 180 - (59^\circ + 61^\circ)$$

$$\angle 1 = 60^\circ$$





11)

$$\angle 2 = 180 - (31^\circ + 90^\circ)$$

$$\angle 2 = 59^\circ$$

$$\angle 2 = \angle 1 = 59^\circ \quad \text{نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس}$$

$$\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + 22)$$

$$\angle 3 = 180^\circ - (59 + 22)$$

$$\angle 3 = 99^\circ$$

(12) طائرات:

(a) متطابق الضلعين، منفرج الزاوية

(b)

بما أن زاوية الهبوط والإقلاع متطابقتين فإنهما متساويتان

وبما أن مجموع زوايا المثلث $= 180^\circ$ إذن:

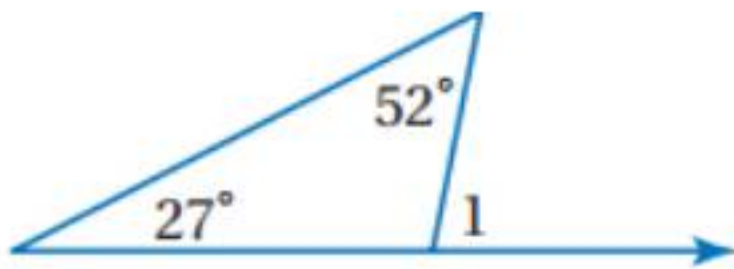
$$7 = 180^\circ - 173^\circ$$

$$3.5 = 2 \div 7^\circ$$

$$3.5^\circ = \text{زاوية الهبوط والإقلاع}$$

اوجد كلا من القياسات الآتية: المثال ٢

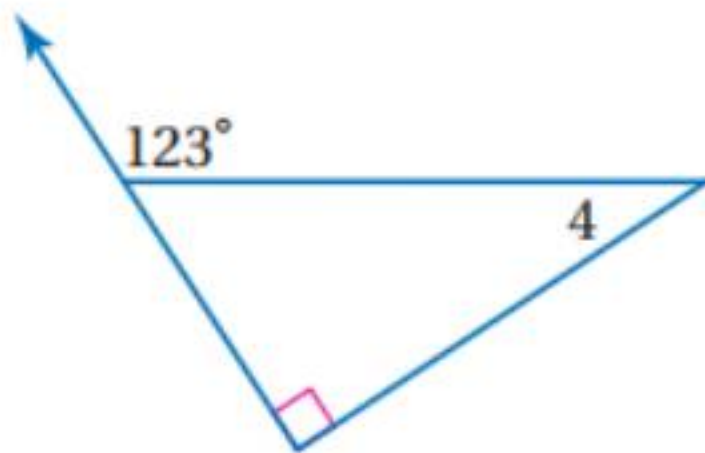
13)



$$\angle 1 = 27^\circ + 52^\circ = 79^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

14)

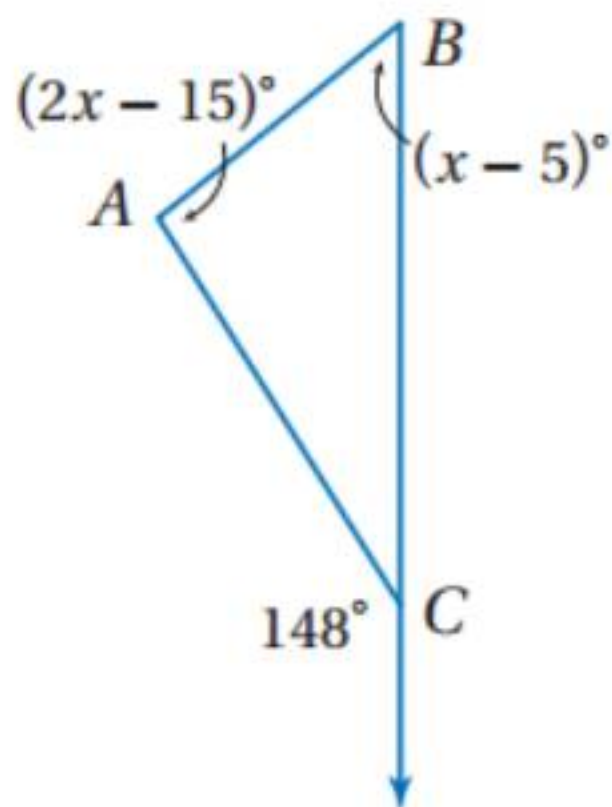


$$123 = \angle 4 + 90^\circ$$

$$\angle 4 = 123^\circ - 90^\circ = 33^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

15)



$$148 = (2x - 15) + (x - 5)$$

$$148 = 3x - 20$$

$$148 + 20 = 3x$$

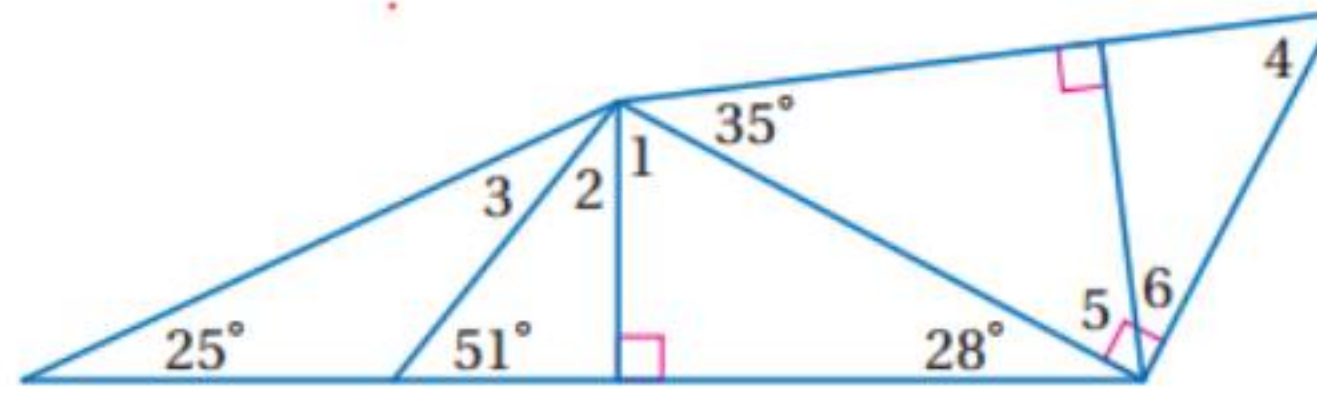
$$168 = 3x$$

$$x = 56^\circ$$

$$\angle ABC = x - 5 = 56 - 5 = 51^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

اوجد كلا من القياسات الآتية: المثال ٣



16)

$$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 28^\circ)$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$$\angle 1 = 62^\circ$$

17)

$$\angle 2 = 180^\circ - (90^\circ + 51^\circ)$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$$\angle 2 = 39^\circ$$

18)

$$\angle 3 = 180^\circ - (129^\circ + 25^\circ)$$

$$\angle 3 = 26^\circ$$

نظرية الزاويتان المتجاورتان للزاوية 51° ونظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

19)

$$\angle 5 = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ)$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$$\angle 5 = 55^\circ$$

20)

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$$\angle 4 = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ)$$

$$\angle 4 = 55^\circ$$

21)

$$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 4 + 90^\circ)$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$$\angle 6 = 180^\circ - (55 + 90^\circ)$$

$$\angle 6 = 35^\circ$$

(22) بستنة:

$$\angle A = 3\angle B, \angle A = 3\angle C$$

$$\angle A = 180 - (\angle B + \angle C) \quad \text{مجموع زوايا المثلث الداخلة} = 180^\circ$$

$$3(\angle B) = 180 - (\angle B + \angle C)$$

$$3(\angle C) = 180 - (\angle B + \angle C)$$

$$3(\angle B) = 180 - \angle B - \angle C$$

$$4\angle B = 180 - \angle C$$

$$4\angle B + \angle C = 180 \rightarrow 1$$

$$3(\angle C) = 180 - \angle B - \angle C$$

$$4\angle C = 180 - \angle B$$

$$4\angle C + \angle B = 180 \quad \times -4$$

$$-4\angle B - 16\angle C = -720 \rightarrow 2$$

$$\cancel{4\angle B} + 15\angle C = \cancel{720} - 720$$

$$\angle C = \frac{540}{15}$$

$$\angle C = 36^\circ$$

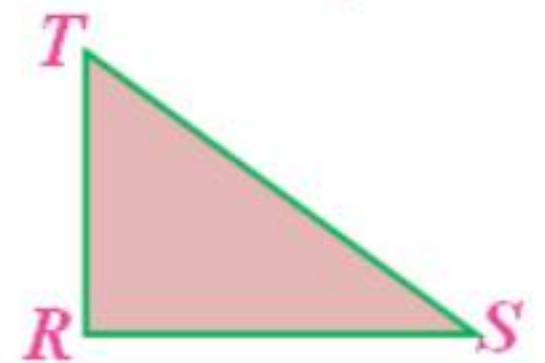
بجمع المعادلتين ١ و ٢

$$\angle B = 36^\circ$$

$$\angle A = 3\angle B = 3 \times 36 = 108^\circ$$

براهين: برهن كل مما يأتي مستعملا طريقة البرهان المذكورة:

(23) النتيجة ١, ٣ باستعمال البرهان التسلسلي.



$$m \angle R + m \angle S + m \angle T = 180^\circ$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle R$ زاوية قائمة

معطى

$$m \angle R = 90^\circ$$

تعريف الزاوية القائمة

$$90 + m \angle S + m \angle T = 180^\circ$$

بالتعويض

$$m \angle S + m \angle T = 90^\circ$$

خاصية الطرح للمساواة

$m \angle S, m \angle T$ زاويتان متتامتان

تعريف الزاويتان المتتامتان

٢٤) النتيجة ٢, ٣ باستعمال البرهان الحر

البرهان:

$\triangle MNO$ فيه $\angle M$ قائمة.

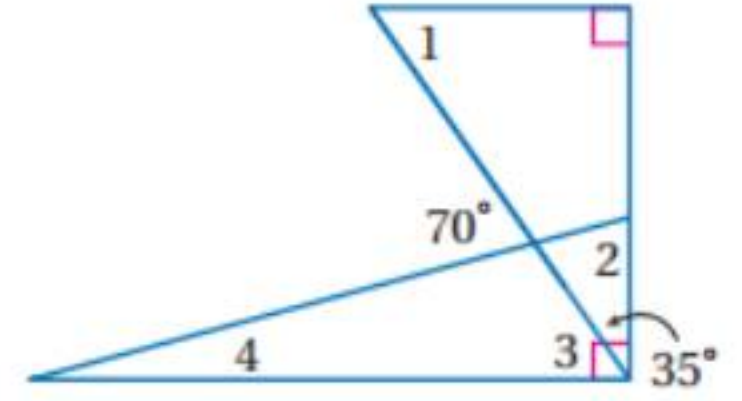
$$180^\circ = m \angle M + m \angle N + m \angle O. 90^\circ = m \angle M, \text{ ولذلك فإن}$$

$$90^\circ = m \angle N + m \angle O. \text{ فإذا كانت } N \text{ زاوية قائمة فسيكون}$$

$$0^\circ = m \angle O. \text{ وهذا مستحيل. لذلك لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان قائمتان.}$$

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة فيما يأتي:

(25)



$$m \angle 1 = 180 - (35^\circ + 90^\circ)$$

$$m \angle 1 = 180^\circ + 125^\circ$$

$$m \angle 1 = 55^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

الزاوية المجاورة ل $70^\circ = 110^\circ$ حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم.

وكذلك الزاوية لمجاورة ل $70^\circ = 110^\circ$ حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم.

$$m \angle 2 = 180 - (70^\circ + 35^\circ)$$

$$m \angle 2 = 75^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$m \angle 4 = 180 - (m \angle 2 + 90^\circ)$$

$$m \angle 4 = 180 - (75^\circ + 90^\circ)$$

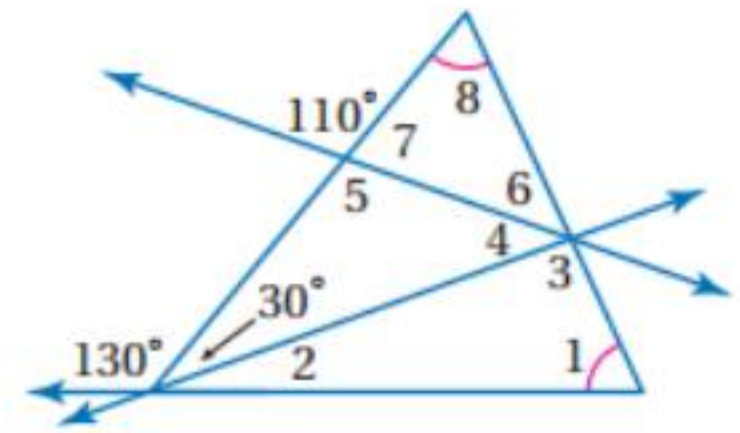
$$m \angle 4 = 15^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$m \angle 3 = 180^\circ - (m \angle 4 + 110^\circ)$$

$$m \angle 3 = 180^\circ - (15^\circ + 110^\circ)$$

$$m \angle 3 = 55^\circ$$



$$m \angle 7 = 180^\circ - 110^\circ$$

$$m \angle 7 = 70^\circ$$

زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$m \angle 5 = 110^\circ$$

بالتقابل بالرأس

$$m \angle 4 = 180^\circ - (110^\circ + 30^\circ)$$

$$m \angle 4 = 40^\circ$$

$$m \angle 2 = 180^\circ - (130^\circ + 30^\circ)$$

$$m \angle 2 = 20^\circ$$

$$(\angle 30^\circ + \angle 2) + (\angle 8 + \angle 1) = 180$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$\therefore \angle 8 = \angle 1$$

$$(30^\circ + 20^\circ) + (\angle 1 + \angle 1) = 180$$

$$50^\circ + 2\angle 1 = 180$$

$$2\angle 1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\angle 1 = 65^\circ$$

$$\angle 8 = 65^\circ$$

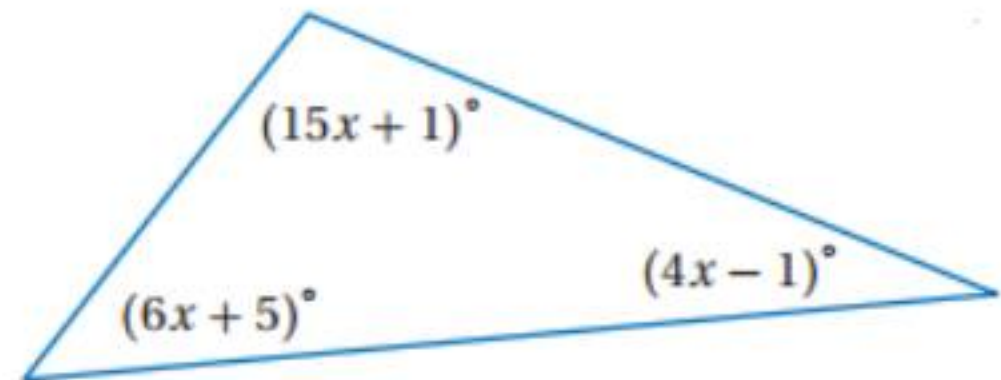
$$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 8 + \angle 7)$$

$$\angle 6 = 180^\circ - (65^\circ + 70^\circ)$$

$$\angle 6 = 49^\circ$$

$$\begin{aligned}\angle 3 &= 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) \\ \angle 3 &= 180^\circ - (65^\circ + 20^\circ) \\ \angle 3 &= 95^\circ\end{aligned}$$

(27) جبر: صنف المثلث المجاور وفقا لزواياه. وفسر إجابتك.



منفرج الزاوية لأن مجموع قياسات الزوايا 180، لذلك فإن $x = 7$ ، وبالتعويض في العبارات الثلاث نجد أن قياسات الزوايا الثلاث هي 106 , 47 , 27

$$\begin{aligned}(15x + 1) + (6x + 5) + (4x - 1) &= 180^\circ \\ 25x + 5 &= 180^\circ \\ 25x &= 175 \\ x &= 7 \\ 15x + 1 &= 15 \times 7 + 1 = 106^\circ \\ 6x + 5 &= 47^\circ \\ 4x - 1 &= 27^\circ\end{aligned}$$

(28) قرر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة:

صحيحة، بما أن مجموع قياسي الزاويتين الحادتين أكبر من 90 فإن قياس الزاوية الثالثة يساوي 180 ناقصا عددا أكبر من 90، وسيكون ناتج الطرح أقل من 90 بالتأكيد وعليه فإن زوايا هذه المثلث الثلاث حادة وهو مثلث حاد الزوايا.

(29) سيارات:



(a)

$$\angle 2 = 180 - (70^\circ + 71^\circ)$$

$$\angle 2 = 39^\circ$$

حسب نظرية مجموع زوايا المثلث

$$\angle 1 = (70^\circ + 71^\circ)$$

$$\angle 1 = 141^\circ$$

حسب نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

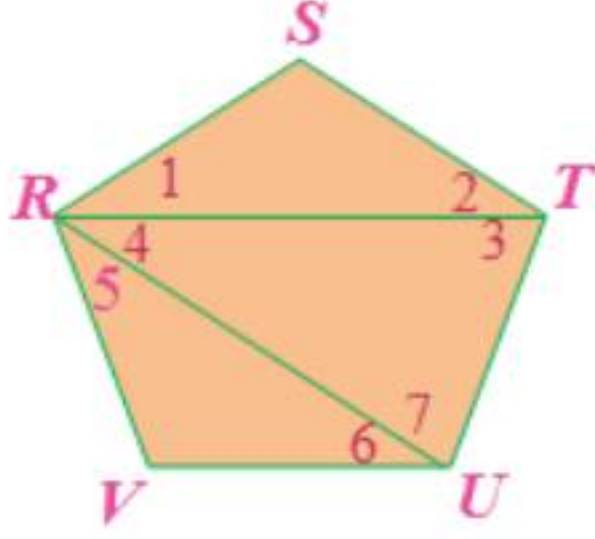
(b) سوف يزداد قياس الزاوية 1 ، لان غطاء السيارة سيقترّب من الساق الأخرى للمثلث المحاذية لرفوف السيارة.

(c) سوف يقل قياس الزاوية 2 ، لان قياس الزاوية 1 سوف يزداد ولان هاتين الزاويتين متجاورتان على مستقيم.

برهان:

(30) برهان ذو عمودين:

1) $RSTUV$ خماسي (معطى)



$$2) m \angle S + m \angle 1 + m \angle 2 = 180, m \angle 3 + m \angle 4 + m \angle 7 = 180, \\ m \angle 6 + m \angle V + m \angle 5 = 180$$

(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

$$3) m \angle S + m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 + m \angle 4 + m \angle 7 + m \angle 6 + \\ m \angle V + m \angle 5 = 540$$

خاصية الجمع للمساواة

$$4) m \angle VRS = m \angle 1 + m \angle 4 + m \angle 5$$

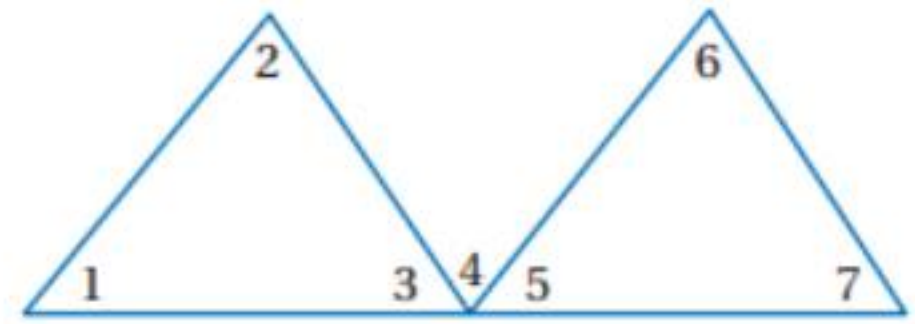
$$m \angle TUV = m \angle 7 + m \angle 6, m \angle STU = m \angle 2 + m \angle 3$$

(مسلمة جمع الزوايا)

$$5) m \angle S + m \angle STU + m \angle TUV + m \angle V + m \angle VRS = 540$$

(بالتعويض)

(31) برهان تسلسلي:



$$\begin{aligned} m\angle 1 + m\angle 2 &= m\angle 4 + m\angle 5 \\ m\angle 6 + m\angle 7 &= m\angle 3 + m\angle 4 \end{aligned}$$

نظرية الزاوية الخارجية

$$\angle 3 = \angle 5$$

معطى

$$m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$$

خاصية الإبدال

$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 3$$

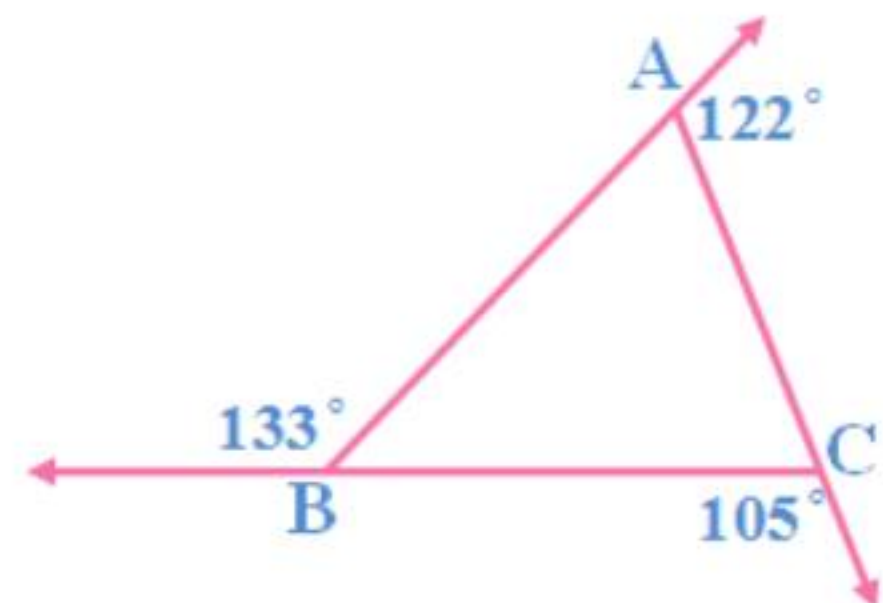
بالتعويض

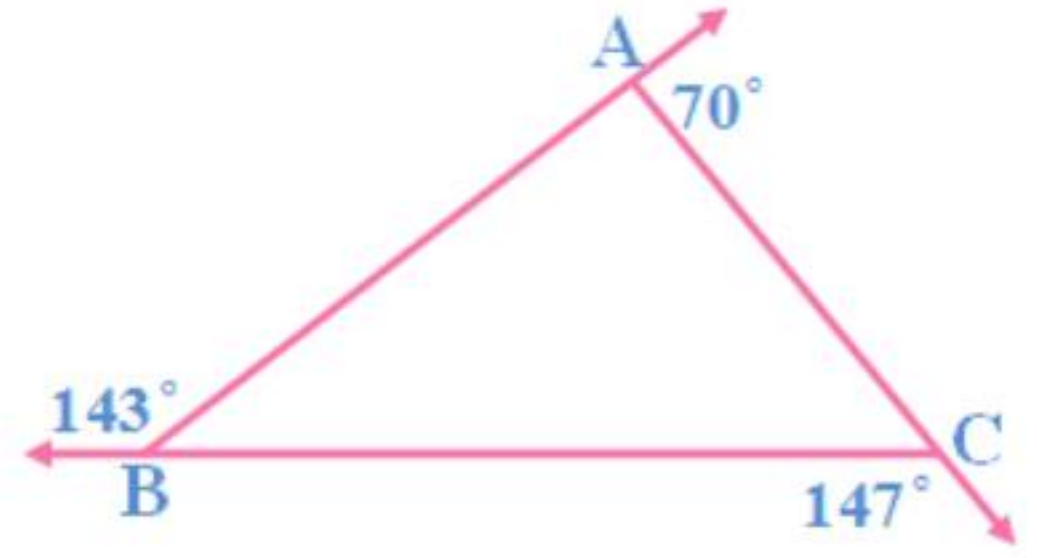
$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$$

بالتعويض

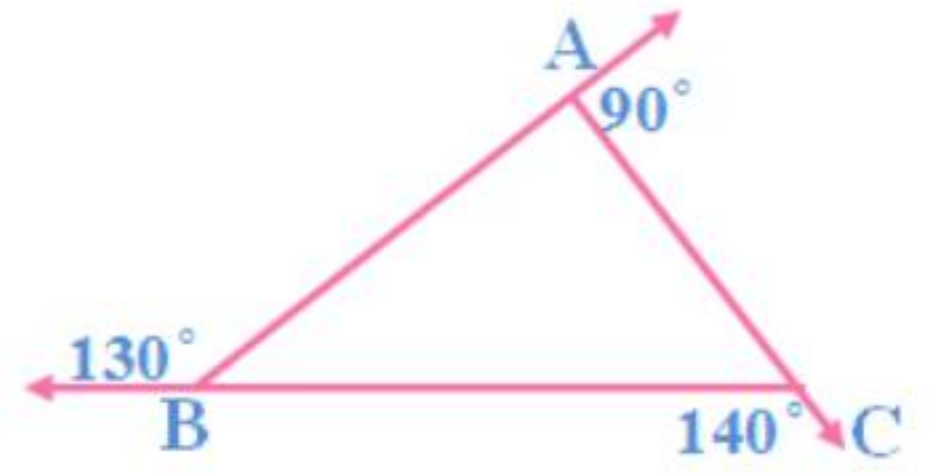
(32) تمثيلات متعددة:

(a) هندسيا:

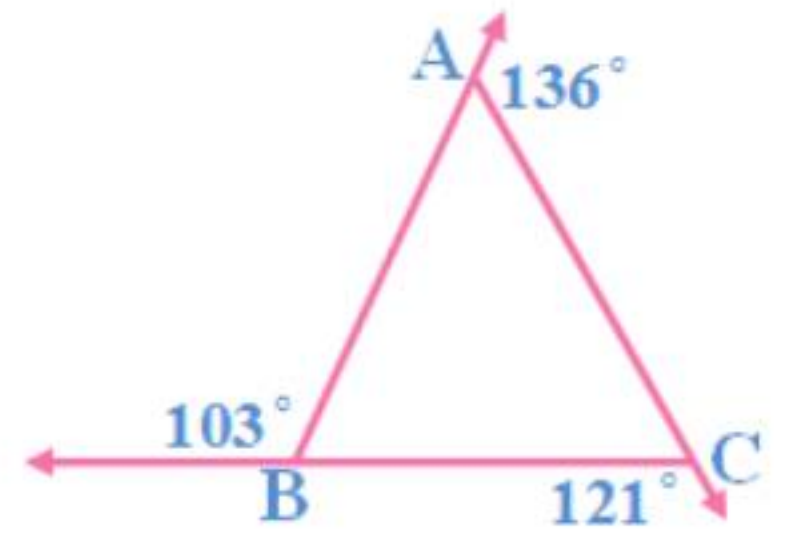




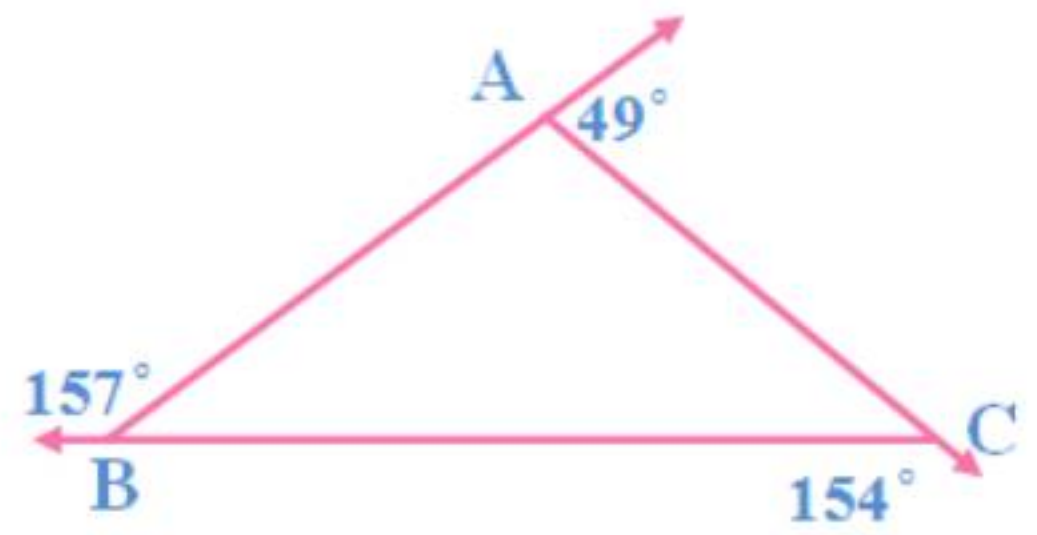
مثلث قائم الزاوية



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزوايا



(b) جدوليا:

المجموع	$\angle 3$	$\angle 2$	$\angle 1$
٣٦٠	١٣٣	١٠٥	١٢٢
٣٦٠	١٤٣	١٤٧	٧٠
٣٦٠	١٣٠	١٤٠	٩٠
٣٦٠	١٠٣	١٢١	١٣٦
٣٦٠	١٥٧	١٥٤	٤٩

(c) لفظيا: مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث يساوي 360°

(d) جبريا: $m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = 360^\circ$

(e) تحليليا:

تخبرنا نظرية الزاوية الخارجية بأن $m \angle 3 = m \angle CAB + m \angle BCA$

وأن $m \angle 2 = m \angle BAC + m \angle CBA$, $m \angle 1 = m \angle CBA + m \angle BCA$

وبالتعويض

$$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = m \angle CBA + m \angle BCA + m \angle BAC + m \angle CBA$$

$+ m \angle CAB + m \angle BCA$. ويمكن تبسيط هذه المعادلة بالشكل التالي:

$$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = 2m \angle CBA + 2m \angle BCA + 2m \angle BAC$$

وباستعمال خاصية التوزيع ينتج:

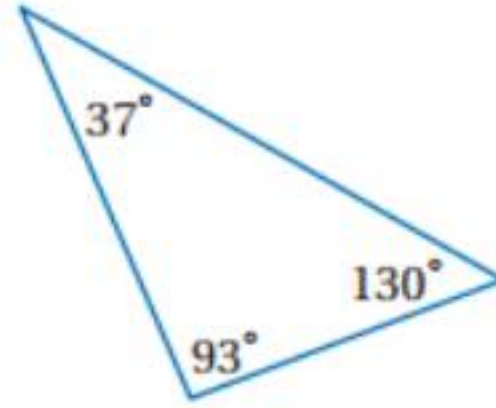
$$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = 2(m \angle CBA + m \angle BCA + m \angle BAC)$$

وتحبرنا نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث أن
 $m \angle CBA + m \angle BCA + m \angle BAC = 180^\circ$ وبالتعويض ينتج أن

$$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = 2(180) = 360^\circ$$

مسائل مهارات التفكير العليا

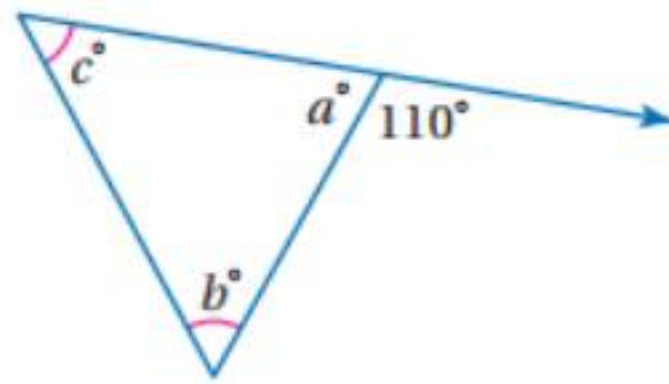
(33) اكتشف الخطأ:



تنص النتيجة 3.2 على أنه يمكن أن يكون في أي مثلث زاوية قائمة أو منفرجة واحدة على الأكثر، وبما أنه كتب في المثلث قياسان لزاويتين منفرجتين 130, 93 فإن واحدا على الأقل منها غير صحيح.

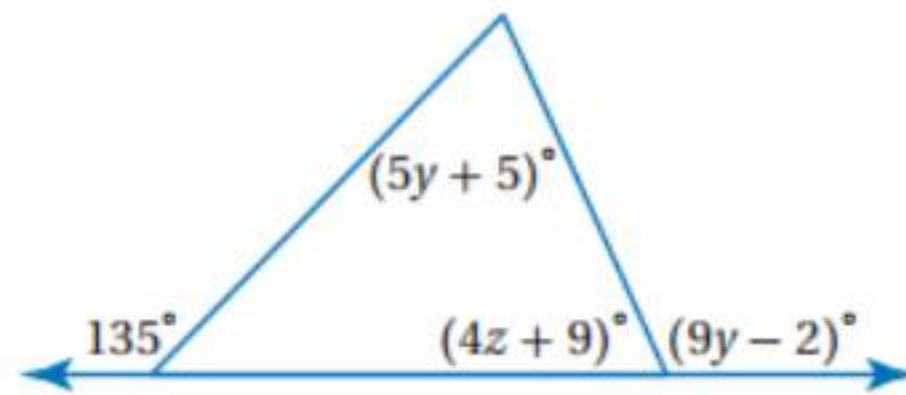
وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث ومجموع القياسات المسجلة في هذا المثلث $= 260^\circ$ فإن واحدا على الأقل من هذه القياسات غير صحيح

(34) اكتب:



$\angle a = 70^\circ$ لأن هذه الزاوية والزاوية التي قياسها 110° متجاورتان على مستقيم
وبما أن $m \angle c = m \angle b$ ومجموعهما يساوي 110° إذن $55^\circ = m \angle c = m \angle b$

(35) تحد:



$$(4z + 9)^\circ + (9y - 2)^\circ = 180^\circ$$

$$4z + 9 + 9y - 2 = 180^\circ$$

$$4z + 9y = 180^\circ - 7$$

$$4z + 9y = 173 \rightarrow 1$$

$$(5y + 5)^\circ + (4z + 9)^\circ = 135^\circ$$

$$5y + 5 + 4z + 9 = 135^\circ$$

$$5y + 4z = 135^\circ - 14$$

$$4z + 5y = 121 \times -1$$

$$-4z - 5y = -121 \rightarrow 2$$

بجمع المعادلة ١ و ٢

$$4y = 52$$

$$y = 13$$

$$4z + 9y = 173$$

$$4z + 9 \times 13 = 173$$

$$4z = 56$$

$$z = 14$$

(36) تبرير:

منفرج الزاوية، لان الزاوية الخارجية حادة ومجموع الزاويتين البعديتين أقل من 90
لذا فان الزاوية الثالثة ستكون أكبر من 90 حتماً.

تدريب على الاختبار المعياري

37) B

$$7x - 3(2 - 5x) = 8x$$

$$7x - 6 + 15x = 8x$$

$$22x - 6 = 8x$$

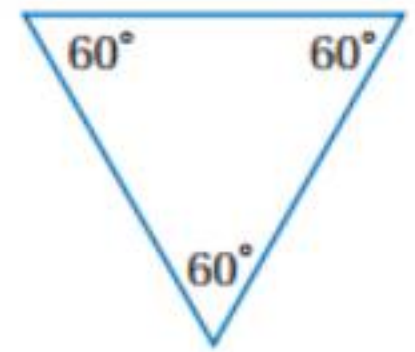
38) C

$$a + b = 90^\circ$$

مراجعة تراكمية

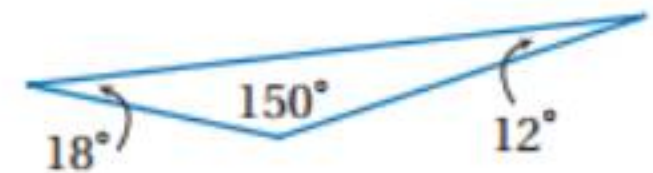
صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو
قائم الزاوية:

(39)



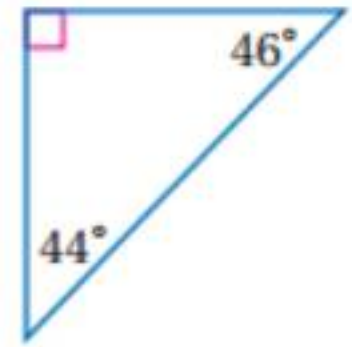
متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية في القياس

(40)



منفرج الزاوية لأن يوجد زاوية قياسها أكبر من 90°

(41)



قائم الزاوية لأن يوجد زاوية قياسها 90°

هندسة إحدائية:

42)

$(0, -2), (1, 3)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{1 - 0} = \frac{5}{1} = 5$$

$(1, 3)$

$$y = mx + b \rightarrow 3 = 5 \times 1 + b$$

$$b = 3 - 5$$

$$b = -2$$

معادلة المستقيم l : $y = 5x - 2$

ميل المستقيم العمودي على l $= \frac{-1}{5}$ لأن $\frac{-1}{5} \times 5 = -1$ ، $P(-4, 4)$

$$y = mx + b \rightarrow 4 = \frac{-1}{5} \times -4 + b$$

$$b = \frac{16}{5}$$

معادلة المستقيم العمودي على المستقيم l والمار بالنقطة $P(-4, 4)$ هي:

$$y = \frac{-1}{5}x + \frac{16}{5} \quad \leftarrow \text{ضرب المعادلة في } -1$$

$$-y = \frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$$

$$\begin{array}{r}
 y = 5x - 2 \\
 (+) -y = \frac{1}{5}x - \frac{16}{5} \\
 \hline
 0 = \frac{26}{5}x - \frac{26}{5}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x = 1 \\
 y = 5x - 2 \\
 y = 5 \times 1 - 2 \\
 y = 3
 \end{array}$$

$$(1, 3), (-4, 4)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (-4 - 1)^2}$$

$$\sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

البعد بين L, P : $\sqrt{26}$ وحدة

(43)

المستقيم l الإحداثي الصادي للنقطتين المار بهما $= 0$ أي ان المستقيم هو المحور X لذا فإن المسافة بين النقطة $P(4, 3)$ و المحور X هو الإحداثي الصادي للنقطة P أي 3 وحدات.

استعد للدرس اللاحق

اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

(44) الانعكاس

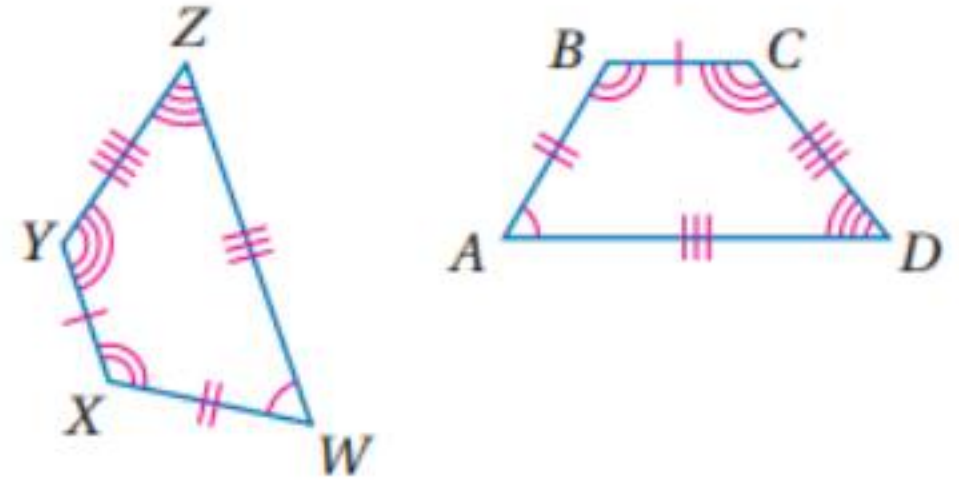
(45) التماثل

(46) التعدي

المثلثات المتطابقة



(1A)

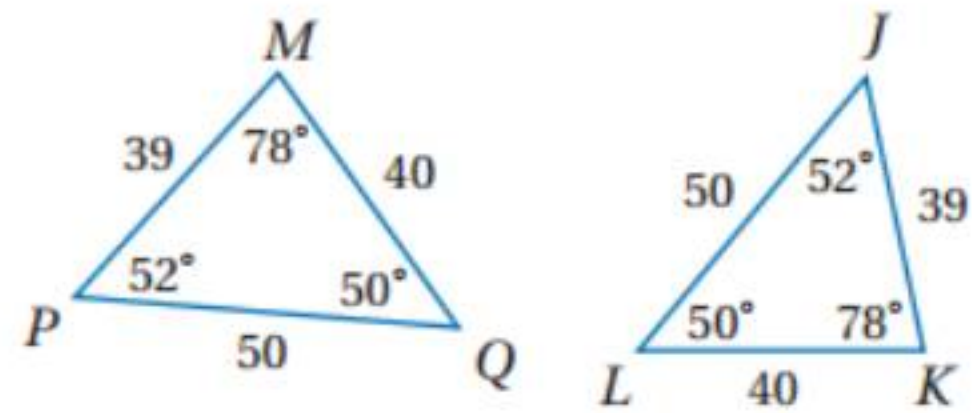


الزوايا: $\angle B \cong \angle X$, $\angle C \cong \angle Y$
 $\angle A \cong \angle W$, $\angle D \cong \angle Z$

الأضلاع: $AB \cong WX$, $BC \cong XY$, $CD \cong YZ$, $DA \cong ZW$

المضلع $WXYZ \cong$ المضلع $ABCD$

(1B)

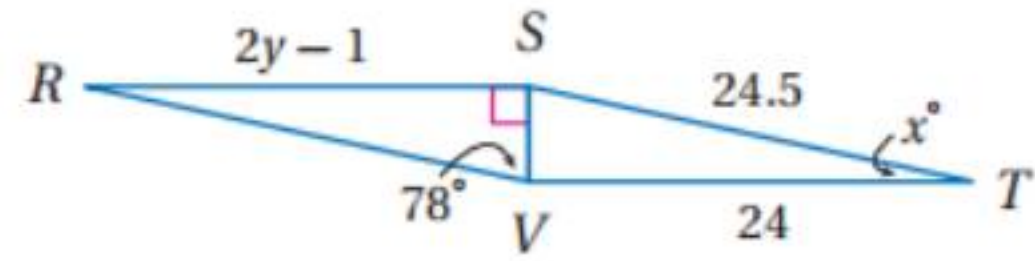


الزوايا: $\angle L \cong \angle Q$, $\angle K \cong \angle M$, $\angle J \cong \angle P$

الأضلاع: $JK \cong PM$, $KL \cong MQ$, $LJ \cong QP$

المثلث $JKL \cong$ المثلث PMQ

(2)



$$\therefore \triangle RSV \cong \triangle TVS$$

$$RS = TV \quad \text{تعريف التطابق}$$

$$2y - 1 = 24 \quad \text{بالتعويض}$$

$$2y = 25$$

$$y = 25 \div 2$$

$$y = 12.5$$

$$\angle TSV = \angle SVR = 78^\circ \quad \text{تعريف التطابق}$$

$$\angle STV = 180^\circ - (78^\circ + 90^\circ) \quad \text{نظرية مجموع زوايا المثلث}$$

$$\angle STV = 12^\circ$$



(3)



بما أن $\overline{WX}$ منصفاً لزاوية $\angle NXR$ إذن $\angle NXW = \angle WXR = 49^\circ$
 بما أن $\triangle WNX \cong \triangle WRX$ إذن $\angle WNX = \angle WRX = 88^\circ$ تعريف التطابق

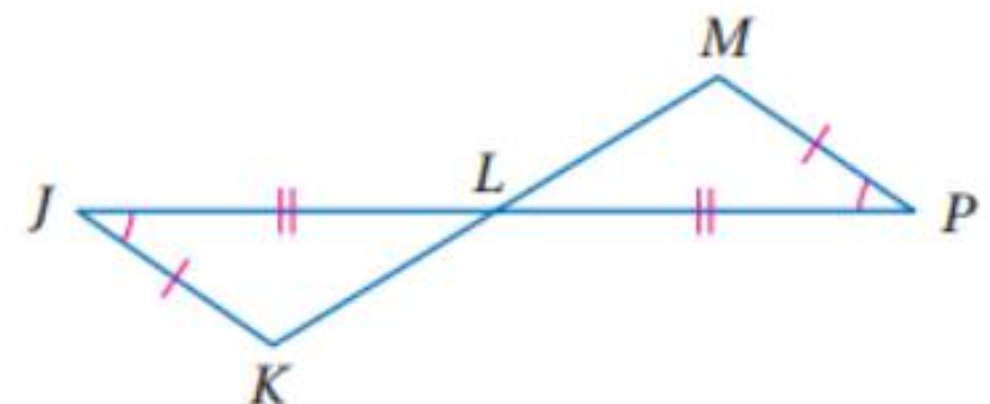
$\angle RWX = 43^\circ$ حسب نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle NWX = \angle RWX$ تعريف التطابق

$$m\angle NWX + m\angle RWX = m\angle NWR$$

$$86^\circ = 43^\circ + 43^\circ = m\angle NWR$$

(4)



(معطى) $\overline{JK} \cong \overline{PM}$, $\overline{JL} \cong \overline{PL}$, $\angle J \cong \angle P$

L تنصف $\overline{KM}$ (معطى)

(تعريف التنصيف) $\overline{LM} \cong \overline{KL}$

(حسب نظرية الزاويتان المتقابلتان بالرأس) $\angle MLP \cong \angle JLK$

(نظرية الزاوية الثالثة) $\angle M \cong \angle K$

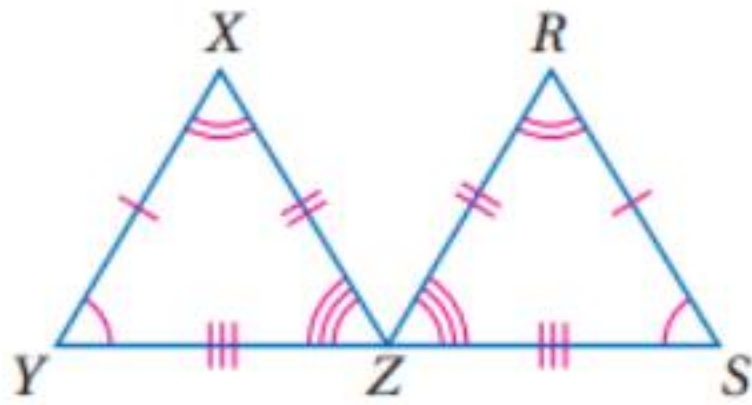
بما أن جميع زوايا المثلثين متطابقة والأضلاع متطابقة إذن

$$\triangle PLM \cong \triangle JLK$$



في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق: المثال ١

1)

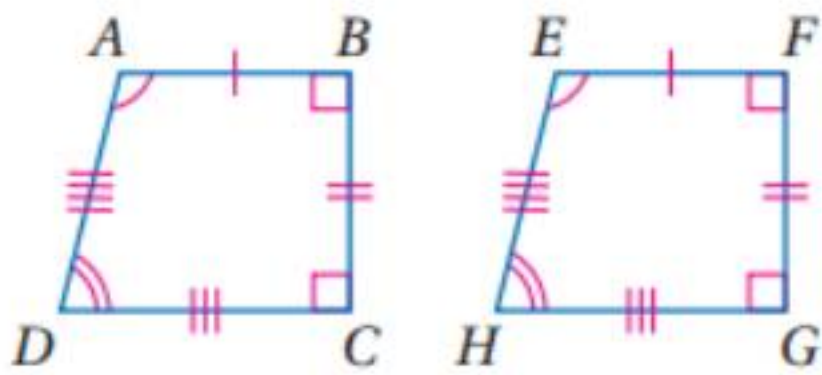


$$\angle Y \cong \angle S, \angle X \cong \angle R, \angle XZY \cong \angle RZS$$

$$\overline{YX} \cong \overline{SR}, \overline{YZ} \cong \overline{SZ}, \overline{XZ} \cong \overline{RZ}$$

$$\triangle YXZ \cong \triangle SRZ$$

1)

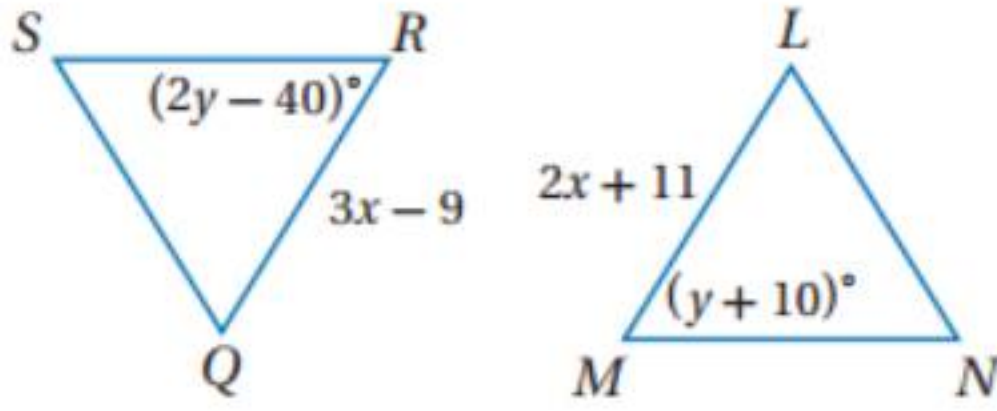


$$\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G, \angle D \cong \angle H$$

$$\overline{AB} \cong \overline{EF}, \overline{CD} \cong \overline{GH}, \overline{AD} \cong \overline{EH}, \overline{BC} \cong \overline{FG}$$

$$EFGH \cong ABCD$$

في الشكلين المجاورين، فأوجد: المثال ٢



3)

$$\therefore \triangle LMN \cong \triangle QRS$$

$$\therefore LM \cong QR$$

$$2x + 11 = 3x - 9$$

$$-x = -9 - 11 = -20$$

$$x = 20$$

4)

$$\therefore \triangle LMN \cong \triangle QRS$$

$$\therefore \angle M = \angle R$$

$$(y + 10)^\circ = (2y - 40)^\circ$$

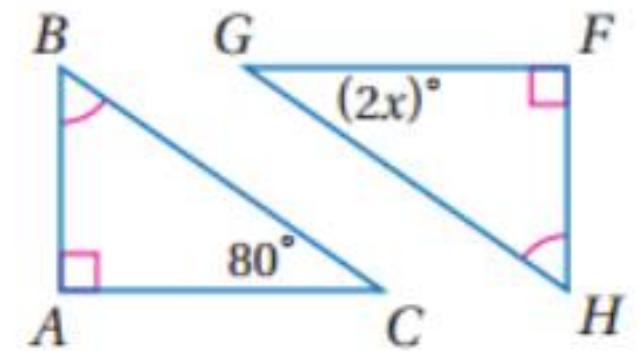
$$-y = -40 - 10$$

$$-y = -50$$

$$y = 50$$

في كل من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x ، وفسر إجابتك: المثال ٣

(5)



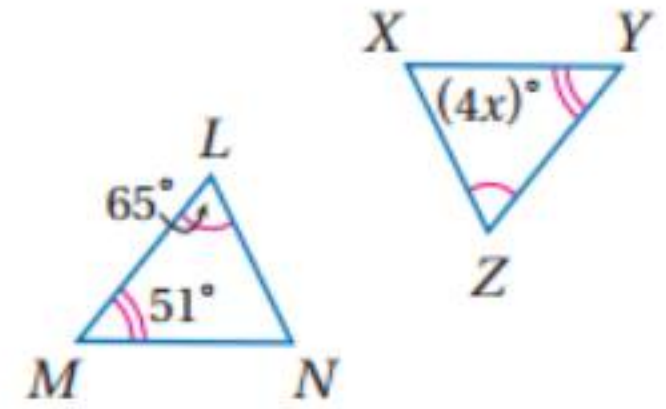
بما أن كل من $\triangle GFH$, $\triangle BAC$ يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما
إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهما متطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$$\angle G \cong \angle C$$

$$2x = 80$$

$$x = 40$$

(6)



بما أن كل من $\triangle XYZ$, $\triangle MLN$ يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما
إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهما متطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$$\angle X \cong \angle N$$

$$4x = \angle N$$

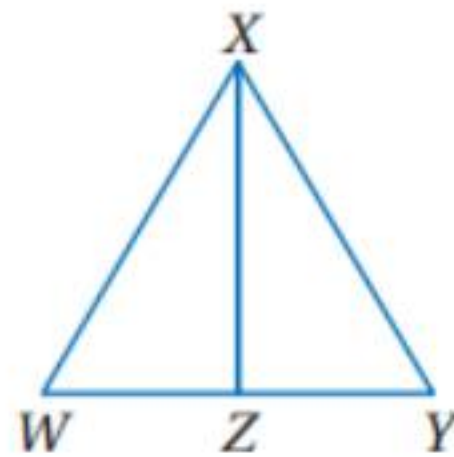
$$\angle N = 180 - (65 + 51)$$

$$\angle N = 64^\circ$$

$$4x = 64^\circ$$

$$x = 16$$

(7) برهان: اكتب برهاننا حرا.



نعلم أن $\overline{WX} \cong \overline{YX}$, $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$, $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$

$$\angle WXZ \cong \angle YXZ , \angle XZW \cong \angle XZY$$

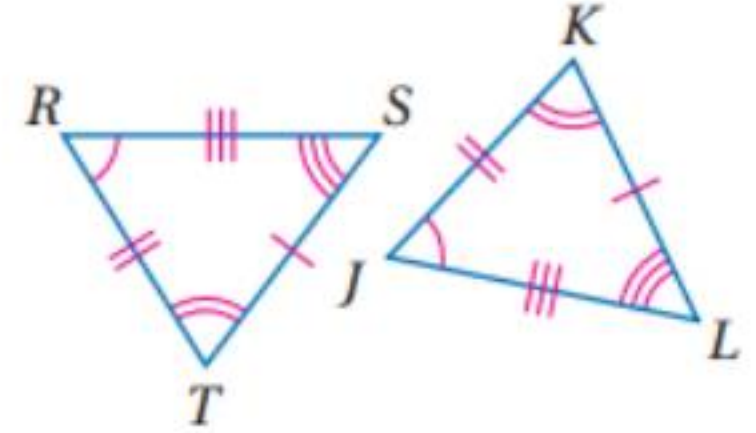
وحسب نظرية الزاوية الثالثة تكون $\angle W = \angle Y$

إذن $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

تدرب وحل المسائل

في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلع ين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة، ثم اكتب عبارة التطابق:

(8)

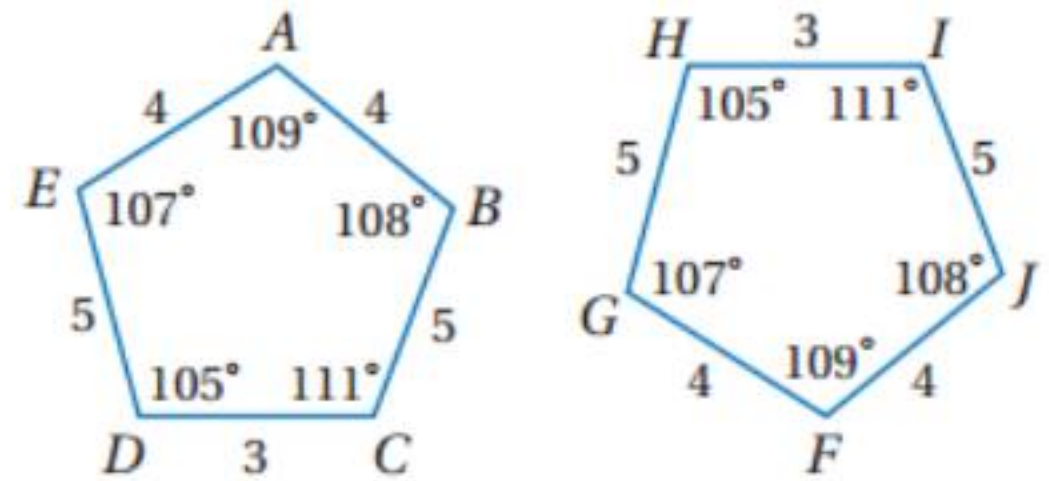


$$\angle R \cong \angle J, \angle T \cong \angle K, \angle S \cong \angle L$$

$$\overline{RT} \cong \overline{JK}, \overline{TS} \cong \overline{KL}, \overline{RS} \cong \overline{JL}$$

إذن $\triangle RTS \cong \triangle JKL$

(9)

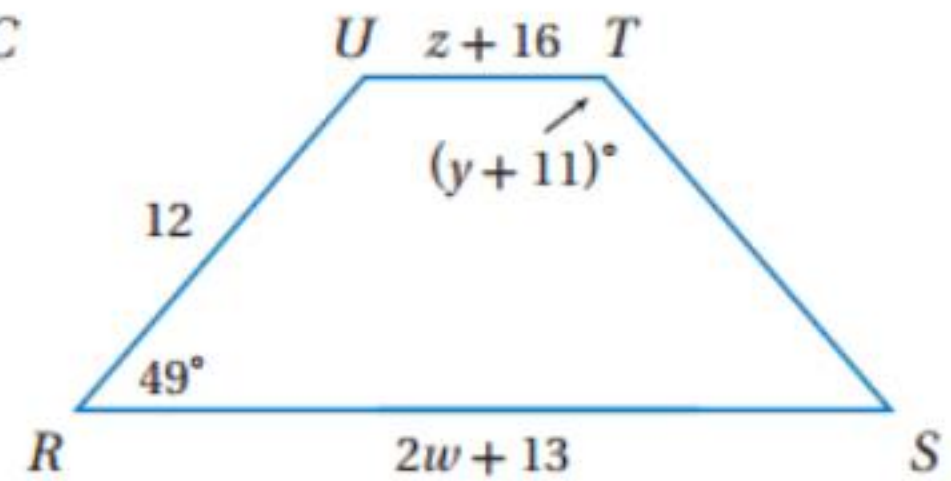
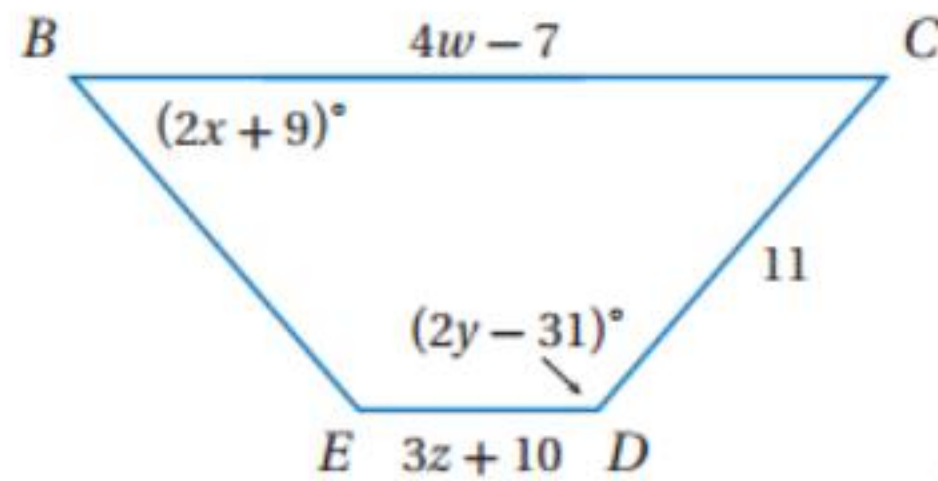


$$\angle A \cong \angle F, \angle B \cong \angle J, \angle C \cong \angle I, \angle D \cong \angle H, \angle E \cong \angle G$$

$$\overline{AB} \cong \overline{FJ}, \overline{BC} \cong \overline{JI}, \overline{CD} \cong \overline{IH}, \overline{DE} \cong \overline{HG}, \overline{AE} \cong \overline{FG}$$

إذن المضلع $ABCDE = FJIHG$

أوجد قيمة كل مما يأتي:



بما أن المضلع $RSTU \cong BCDE$

10)

$$\therefore \angle R \cong \angle B$$

$$49^\circ = 2x + 9$$

$$49 - 9 = 2x$$

$$x = 20$$

11)

$$\therefore \angle D \cong \angle T$$

$$(2y - 31)^\circ = (y + 11)^\circ$$

$$y = 11 + 31$$

$$y = 42$$

12)

$$\therefore \overline{ED} \cong \overline{UT}$$

$$(3z + 10)^\circ = (z + 16)^\circ$$

$$2z = 16 - 10$$

$$z = 3$$

13)

$$\therefore \overline{BC} \cong \overline{RS}$$

$$(4w - 7)^\circ = (2w + 13)^\circ$$

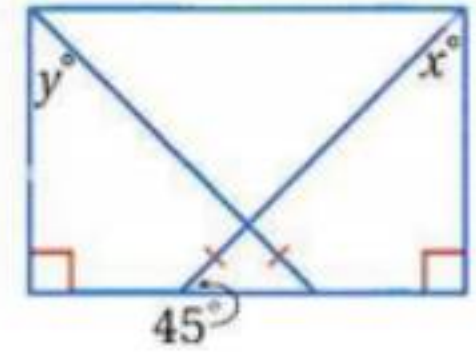
$$2w = 13 + 7$$

$$2w = 20$$

$$10 = w$$

أوجد قيمة كل من x , y في الأسئلة الآتية:

(14)

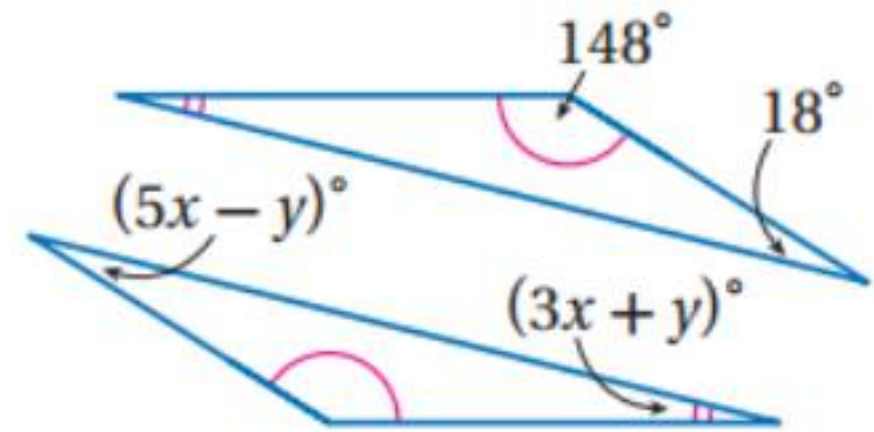


$$45^\circ = y$$

$$45^\circ = x$$

لأن المثلث المتطابق الضلعين زواياه القاعدة له متساوية وكل منها = ٥ ٤

(15)



$$(3x + y)^\circ = 180^\circ - (18^\circ + 148^\circ)$$

$$3x + y = 14 \rightarrow 1$$

$$5x - y = 18 \rightarrow 2$$

$$8x = 32$$

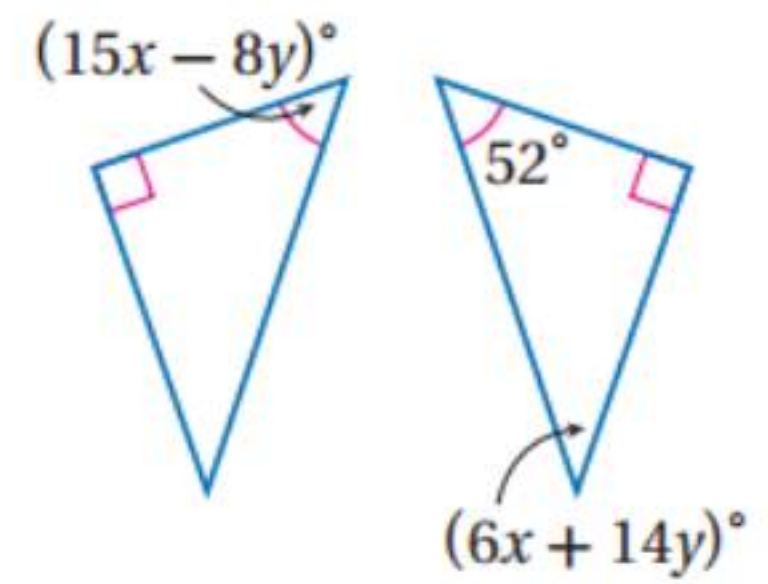
$$x = 4$$

$$5 \times 4 - y = 18$$

$$y = 20 - 18$$

$$y = 2$$

(16)



$$(15x - 8y)^\circ = 52^\circ$$

$$(6x + 14y)^\circ = 180 - (52 + 90)$$

$$6x + 14y = 38 \rightarrow \div 2$$

$$3x + 7y = 19 \rightarrow \times (-5)$$

$$-15x - 35y = -95 \rightarrow 1$$

$$15x - 8y = 52 \rightarrow 2$$

$$0 - 43y = -43$$

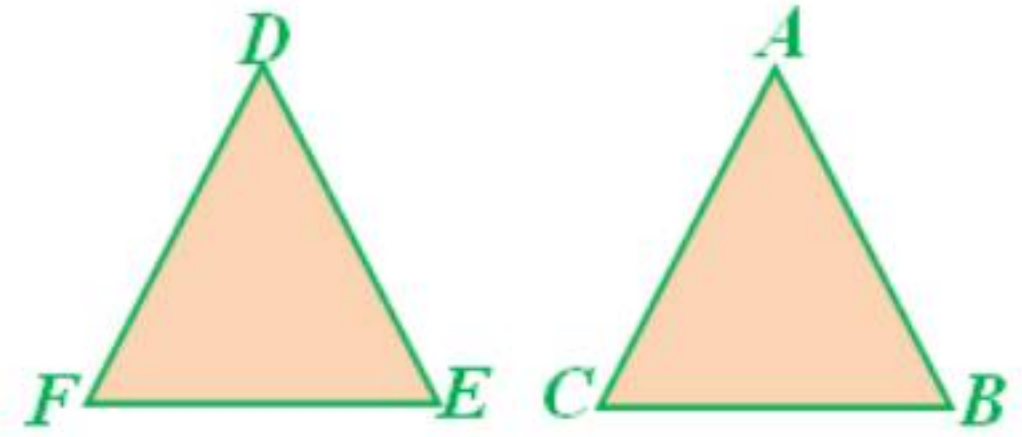
$$y = 1$$

$$15x - 8 \times 1 = 52$$

$$15x = 60$$

$$x = 4$$

(17) برهان: المثال ٤



(1) $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ (معطيات)

(2) $m \angle A = m \angle D, m \angle B = m \angle E$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

(3) $m \angle A + m \angle B + m \angle C = 180^\circ, m \angle D + m \angle E + m \angle F = 180^\circ$

(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

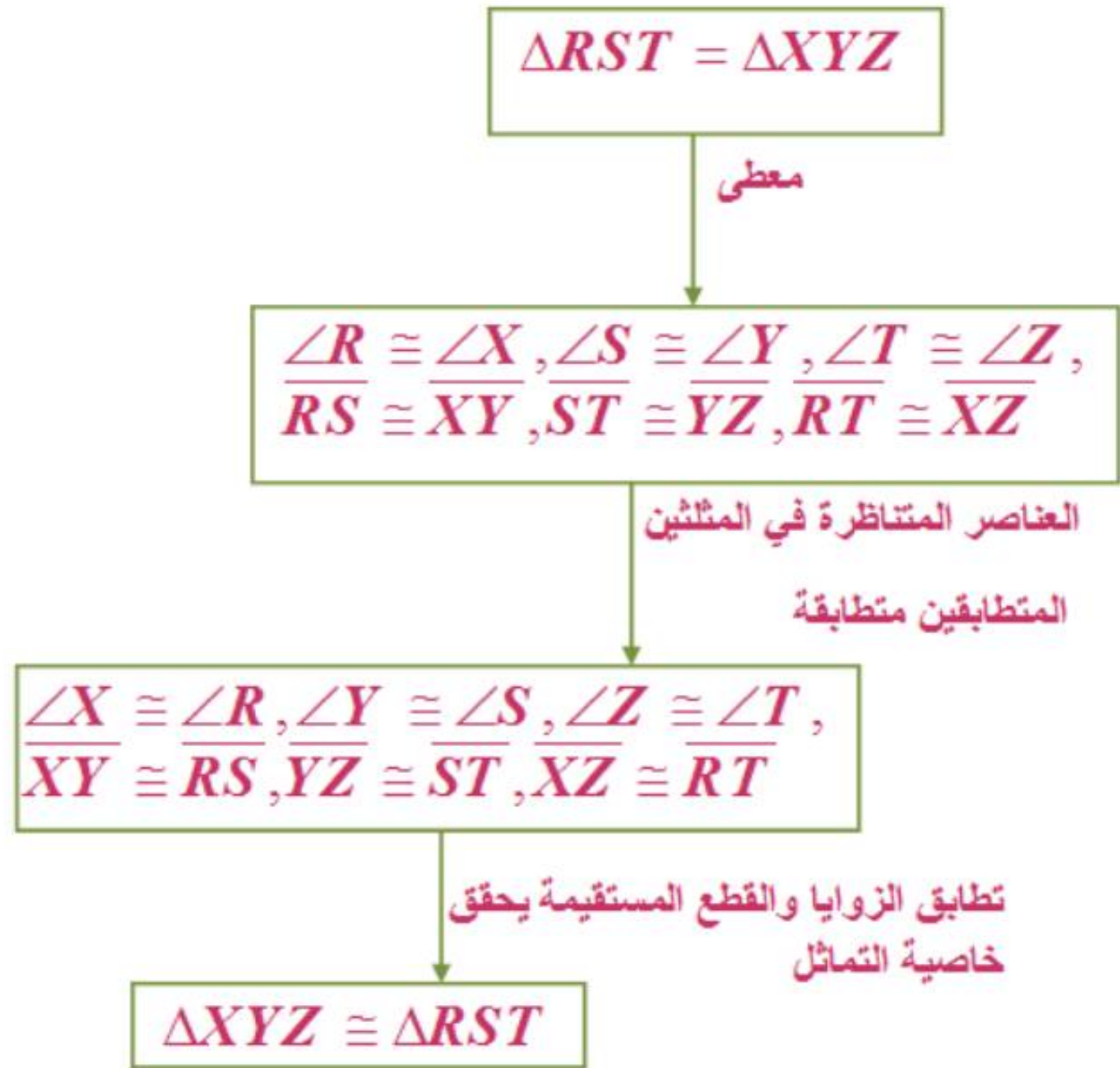
(4) $m \angle A + m \angle B + m \angle C = m \angle D + m \angle E + m \angle F$ (خاصية التعدي)

(5) $m \angle D + m \angle E + m \angle C = m \angle D + m \angle E + m \angle F$ (خاصية التعويض)

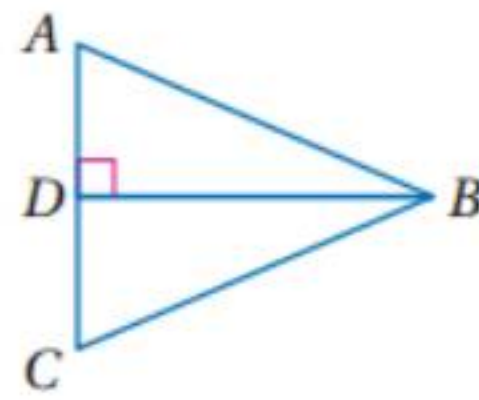
(6) $m \angle C = m \angle F$ (خاصية الطرح للمساواة)

(7) $\angle C \cong \angle F$ (تعريف تطابق الزوايا)

(18) برهان:



(19) برهان:



- (1) $\overline{BD}$ تنصف $\angle B$ ، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ (معطيات)
- (2) $\angle ABD \cong \angle DBC$ (تعريف منصف الزوايا)
- (3) $\angle ADB, \angle BDC$ قائمتان (المستقيمان المتعامدان يكونان زاوية قائمة)
- (4) $\angle ADB \cong \angle BDC$ (الزوايا القائمة متطابقة)
- (5) $\angle A \cong \angle C$ نظرية الزاوية الثالثة

برهان:

(20)

نعلم أن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن: $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$,

$$AB \cong DE, BC \cong EF, AC \cong DF$$

نعلم أن $\triangle DEF \cong \triangle GHI$ ولذا فإن:

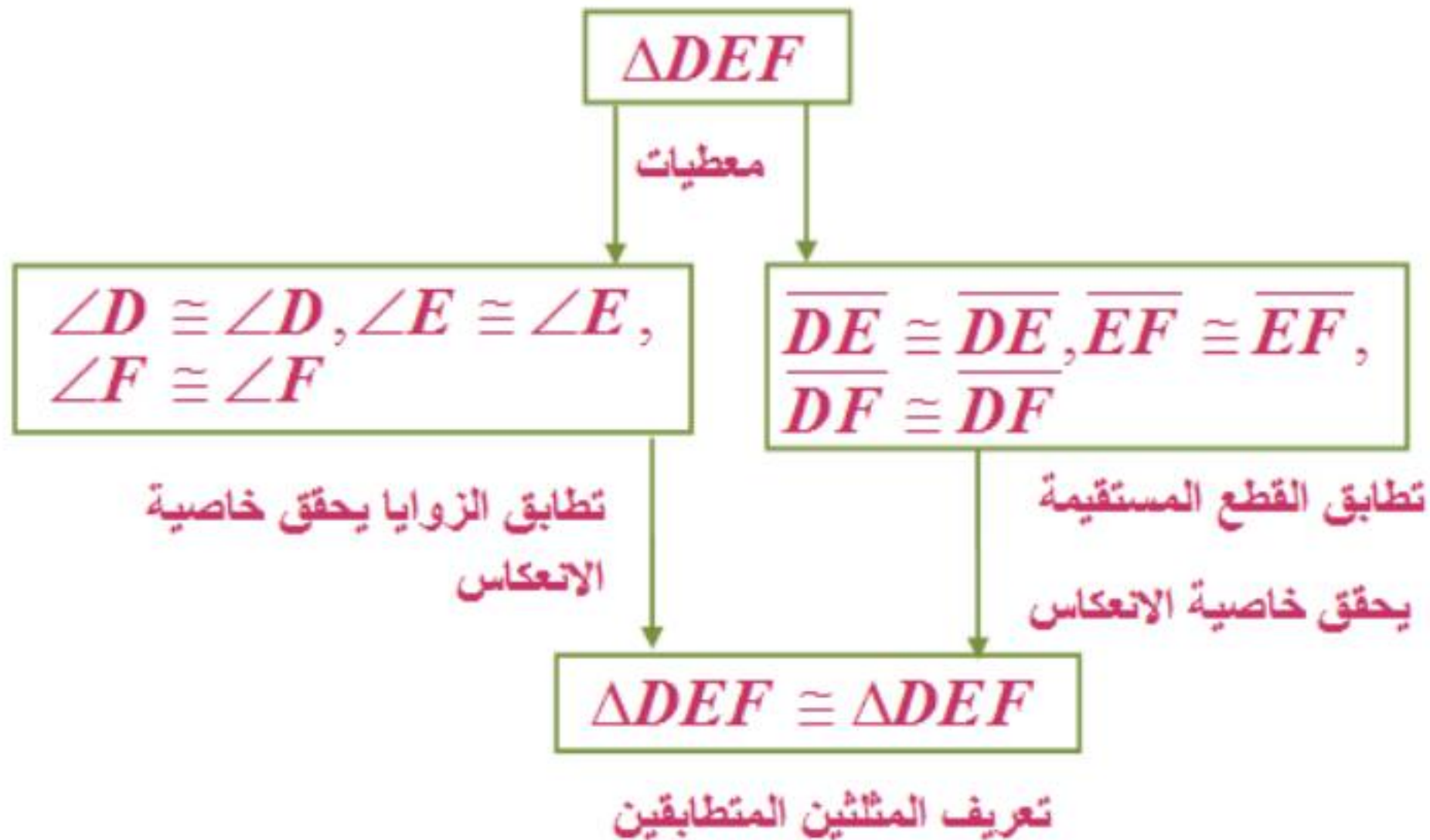
$$DE \cong GH, EF \cong HI, DF \cong GI, \angle D \cong \angle G, \angle E \cong \angle H, \angle F \cong \angle I$$

لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. وعليه فإن

$$\angle A \cong \angle G, \angle B \cong \angle H, \angle C \cong \angle I, AB \cong GH, BC \cong HI, AC \cong GI$$

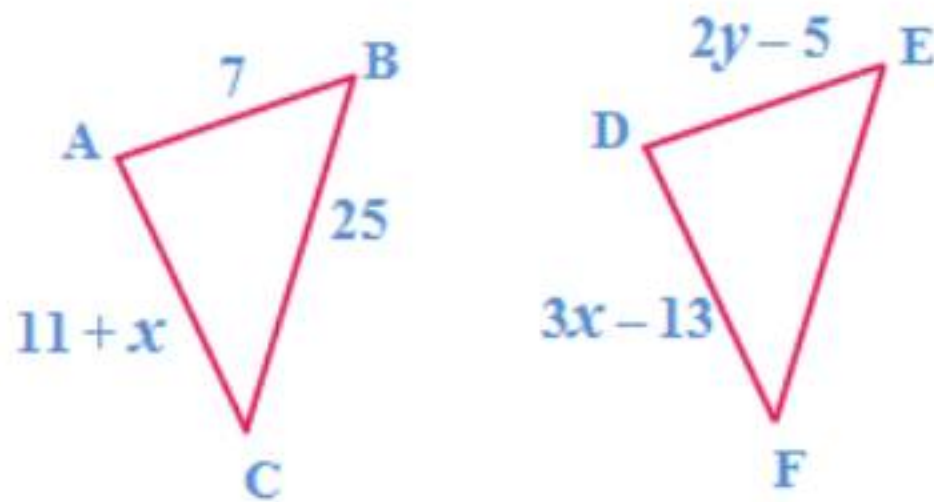
لأن تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي وبهذا يكون $\triangle ABC \cong \triangle GHI$ من تعريف المثلثين المتطابقين.

(21)



جبر: ارسم شكلاً يمثل المثلثين المتطابقين في كل من السؤالين الآتيين، وسمه وأوجد قيمة x, y :

22)



$$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

$$\therefore DE = AB$$

$$2y - 5 = 7$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$DF = AC$$

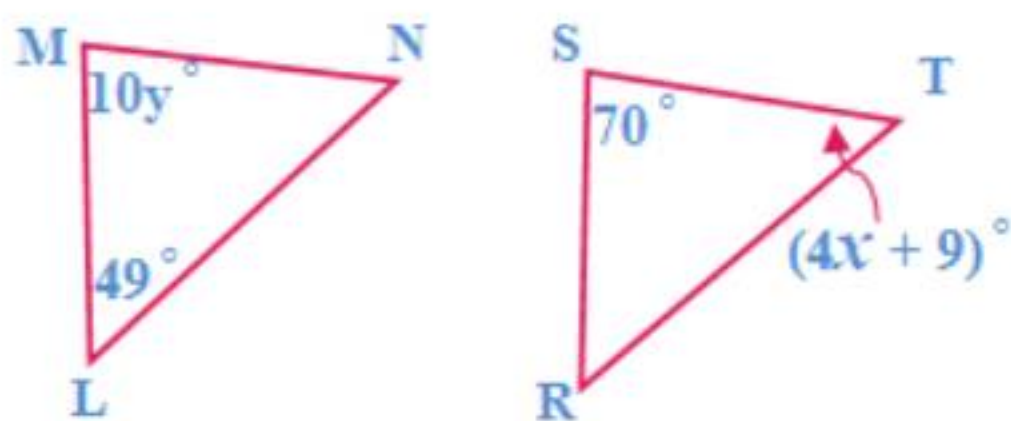
$$3x - 13 = x + 11$$

$$2x = 11 + 13$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

23)



$$\because \triangle LMN \cong \triangle RST$$

$$\angle M = \angle S$$

$$10y = 70$$

$$y = 7$$

$$\angle N = 180^\circ - (49^\circ + 70^\circ)$$

$$\angle N = 61^\circ$$

$$\therefore \triangle LMN \cong \triangle RST$$

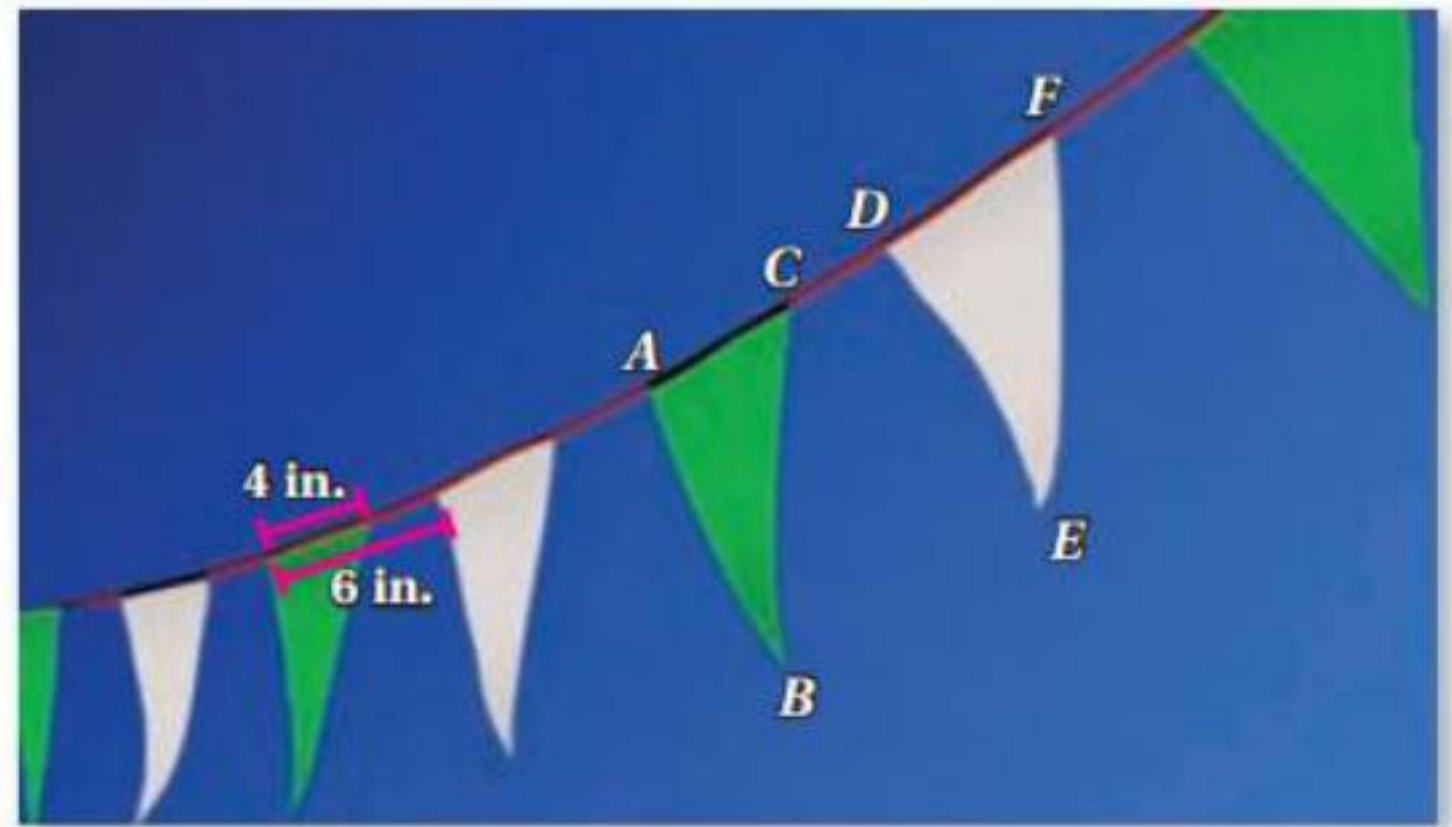
$$\therefore \angle T = \angle N$$

$$4x + 9 = 61$$

$$4x = 52$$

$$x = 13$$

(24) رايات:



a)

$$AB = CB, AB = DE, AB = FE, \\ CB = DE, CB = FE, DE = FE, AC = DF$$

(b) بما أن مساحة المنطقة مربعة = ١٠٠ قدم مربعة

مساحة المربع = طول الضلع في نفسه، إذن طول الضلع = ١٠ وبالتالي سيكون طول

$$\text{الحبل } 40 = 10 + 10 + 10 + 10$$

(c)

يوجد 2 راية كل قدم من الحبل إذن

$$80 = 2 \times 40 \text{ راية}$$

(25) تمثيلات متعددة:

(a) لفظيا:

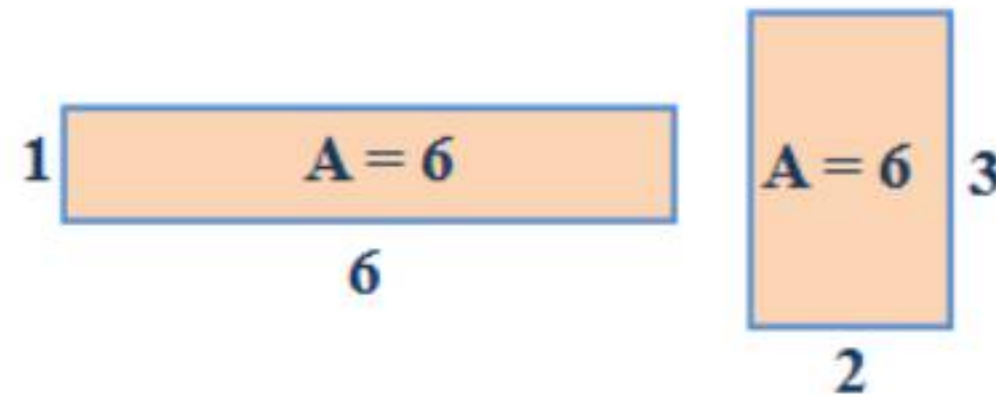
إذا تطابق مثلثان فإن مساحتهما متساويتان.

(b) لفظيا:

العبارة الشرطية: إذا تساوت مساحتا مثلثين فإن المثلثين متطابقان.

خطأ، فإذا كانت قاعدة المثلث 2 وارتفاعه 6 وكانت قاعدة مثلث آخر 3 وارتفاعه 4 فإن مساحتهما متساويتان ولكن هذين المثلثين غير متطابقين.

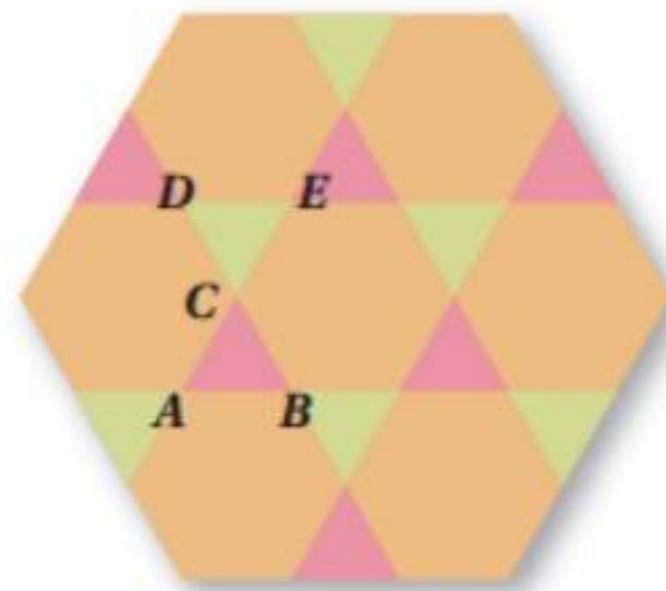
(c) هندسيا: نعم يمكن



(d) هندسيا:

لا يمكن، لأن المربعين اللذين لهما المساحة نفسها يكون لأضلاعهما الطول نفسه وهو الجذر التربيعي للمساحة فإذا كانت المساحتان متساويتين يكون المربعان متطابقين.

(26) أنماط:



(a) المضلع السداسي المنتظم والمثلث المتطابق الأضلاع

(b) $\triangle ABC \cong DEC$

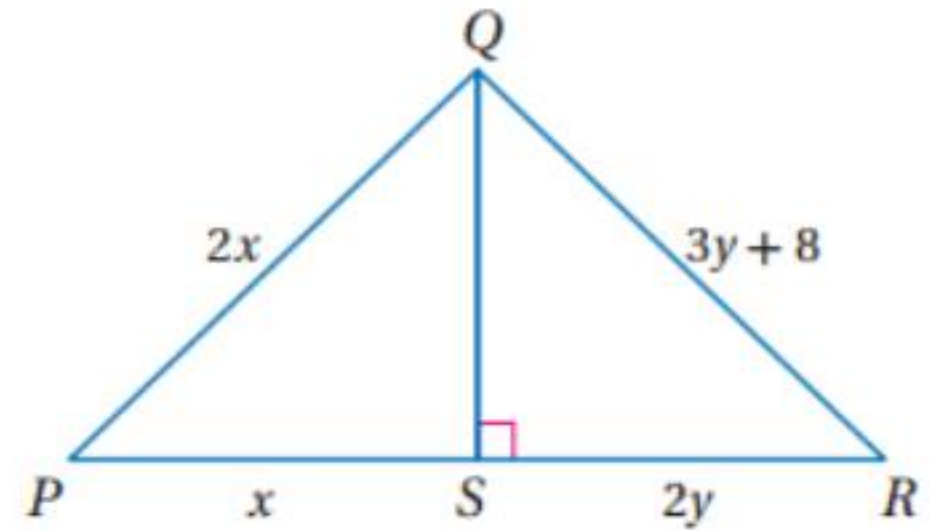
$$\angle B = \angle E \text{ (c)}$$

(d) $4\text{in} = AE$ ، لان المضلعات التي صمم منها النمط منتظمة فأطوال أضلاع المثلثات جميعها متطابقة وهذا يعني أن طول CB يساوي طول كل من AC , CE لذا فان $4 = 2 + 2 = CE + AC = AE$

(e) $60^\circ = \angle D$ ، لان جميع مثلثات النمط منتظمة فهي مثلثات متطابقة الأضلاع ومتطابقة الزوايا، وتكون كل زاوية في أي مثلث مساوية لـ 60

مسائل مهارات التفكير العليا

(27) تحد:



$$\Delta RQS \cong \Delta PQS$$

$$RS = PS$$

$$2y = x$$

$$RQ = PQ$$

$$3y + 8 = 2x$$

$$\therefore x = 2y$$

$$3y + 8 = 2 \times (2y)$$

$$3y - 4y = -8$$

$$-y = -8$$

$$y = 8$$

$$x = 2 \times 8$$

$$x = 16$$

تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأ.

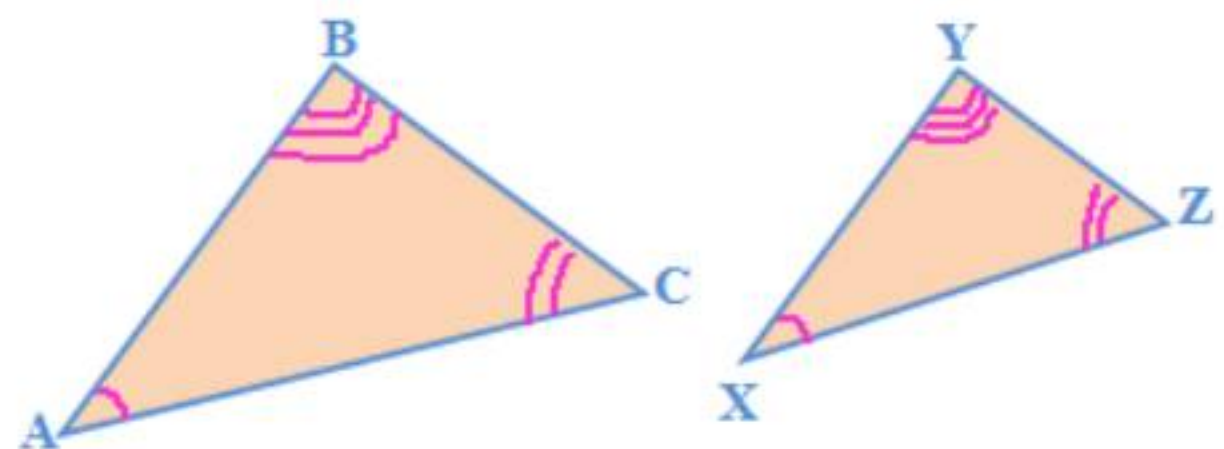
(28)

صحيحة، باستعمال نظرية الزاوية الثالثة، يكون الزوج الثالث من الزوايا متطابقتان أيضا وجميع الأضلاع المناظرة متطابقة، ولأن العناصر المتناظرة متطابقة فإن المثلثين متطابقان.

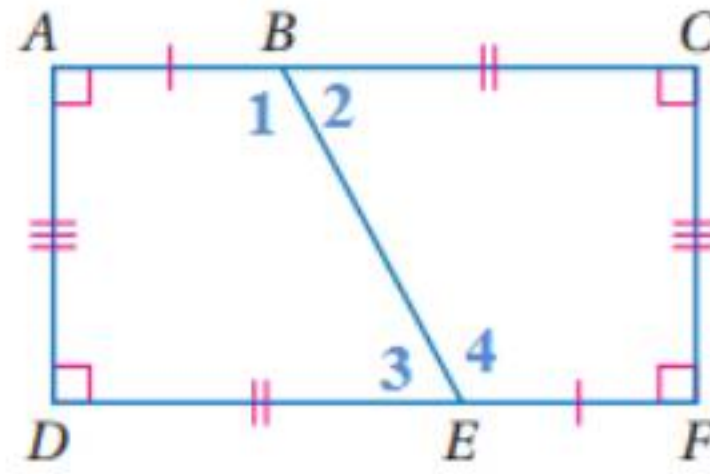
(29)

خطأ، $\angle A = \angle X$, $\angle B = \angle Y$, $\angle C = \angle Z$

لكن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة.



(30) تحد:



$$AB = EF, ED = BC, AD = FC$$

الزوايا المتبادلة داخليا متطابقة فإن $\angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3$

المضلع $ABED$ = المضلع $FEBC$

(31) اكتب:

صحيحة أحيانا، يكون المثلثات المتطابقا الأضلاع متطابقين إذا تطابق زوج من الأضلاع المتناظرة فيها

تدريب على الاختبار المعيارى

32) A

$$\triangle ABC \cong \triangle HIJ$$

$$AC = HJ$$

$$(-1, 2), (2, -2)$$

$$d_{(H, J)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 - (-1))^2}$$

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

33) C

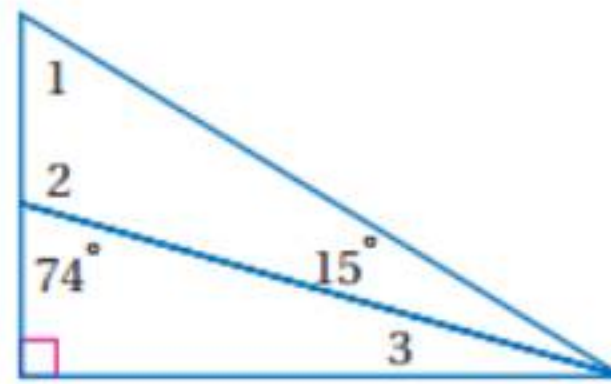
$$x^2 + 19x - 42 = 0$$

$$(x + 21)(x - 2) = 0$$

إذن $(x - 2)$ هو أحد العوامل

مراجعة تراكمية

في الشكل المجاور أوجد كلا من القياسات الآتية:



34)

$$\angle 2 = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$$

زاويتان متجاورتان على مستقيم

35)

$$\angle 1 = 180^\circ - (106^\circ + 15^\circ) = 59^\circ$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

36)

$$\angle 3 = 180^\circ - (90^\circ + 74^\circ) = 16^\circ$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

37) هندسة إحداثية: مختلف الأضلاع

$$K (15,0), L (-2,-1)$$

$$d_{(K,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - (15))^2 + (-1 - 0)^2}$$

$$\sqrt{289 + 1} = \sqrt{290}$$

$$J (-7,10), K (15,0)$$

$$d_{(J,K)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(15 - (-7))^2 + (0 - 10)^2}$$

$$\sqrt{484 + 100} = 2\sqrt{146}$$

$$J(-7,10), L(-2,-1)$$

$$d_{(J,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - (-7))^2 + (-1 - 10)^2}$$

$$\sqrt{25 + 121} = \sqrt{146}$$

$$JK = 2\sqrt{146}, KL = \sqrt{290}, JL = \sqrt{146}$$

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائماً أو أحياناً أو ليست صحيحة أبداً:

(38) صحيحة دائماً

(39) صحيحة أحياناً

استعد للدرس اللاحق

(40)

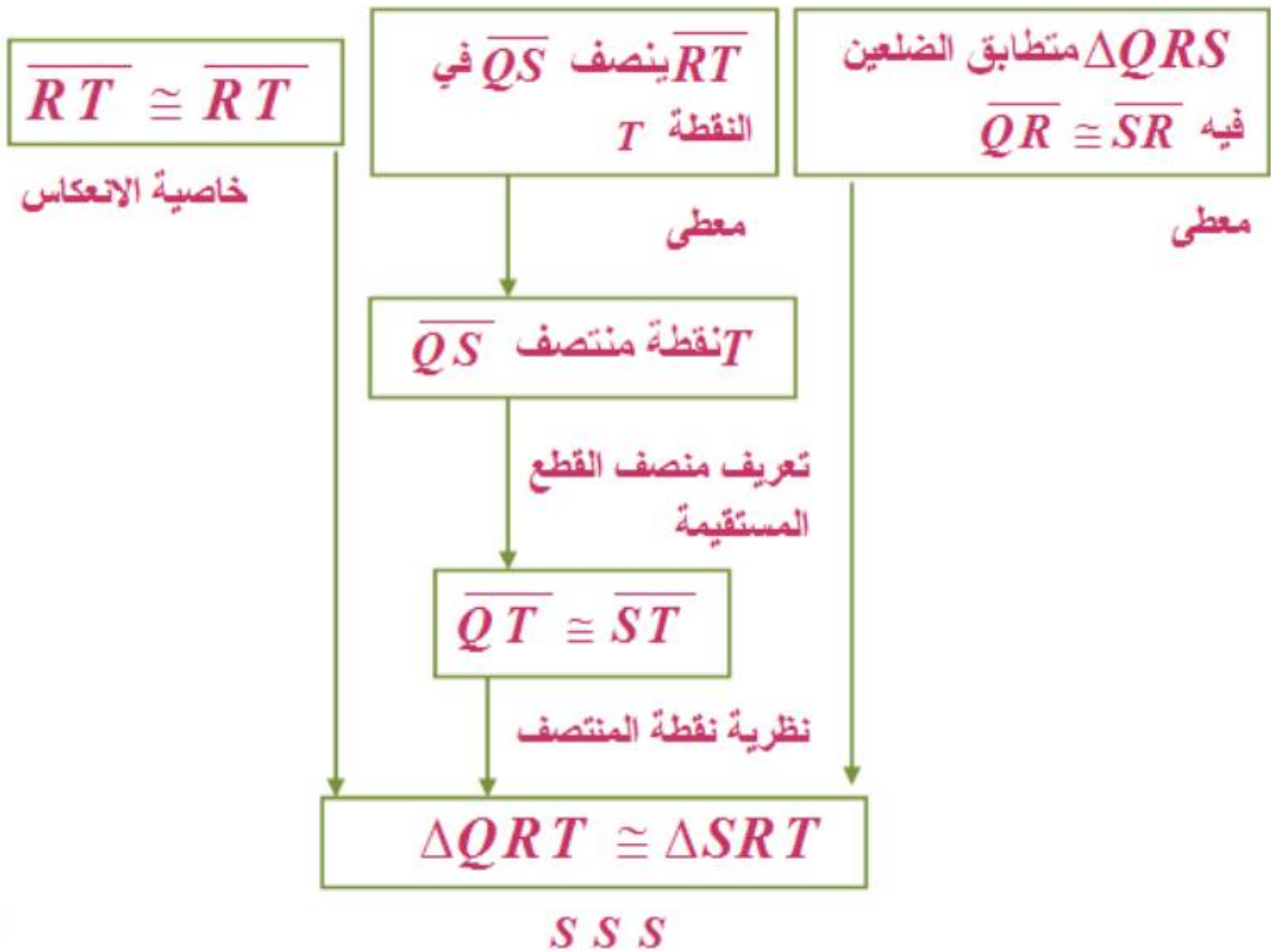
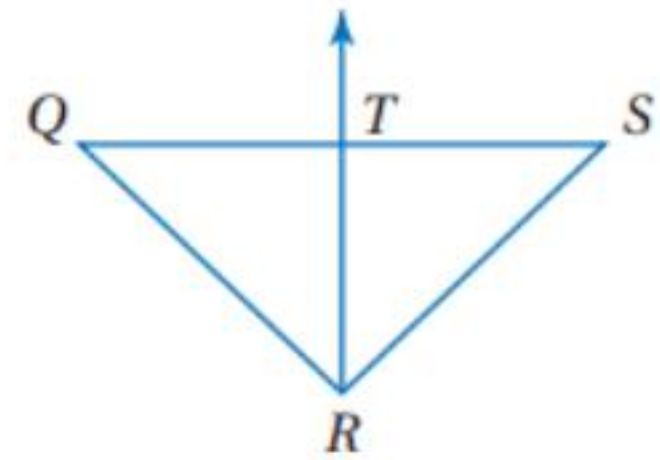
المبررات	العبارات
(a) معطيات	$\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{MN} \cong \overline{PQ}$ (a)
(b) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة	$MN = PQ, PQ = RS$ (b)
(c) خاصية التعدي	$\overline{MN} = \overline{RS}$ (c)
(d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة	$\overline{MN} \cong \overline{RS}$ (c)

إثبات تطابق المثلثات SAS , SSS

3-4

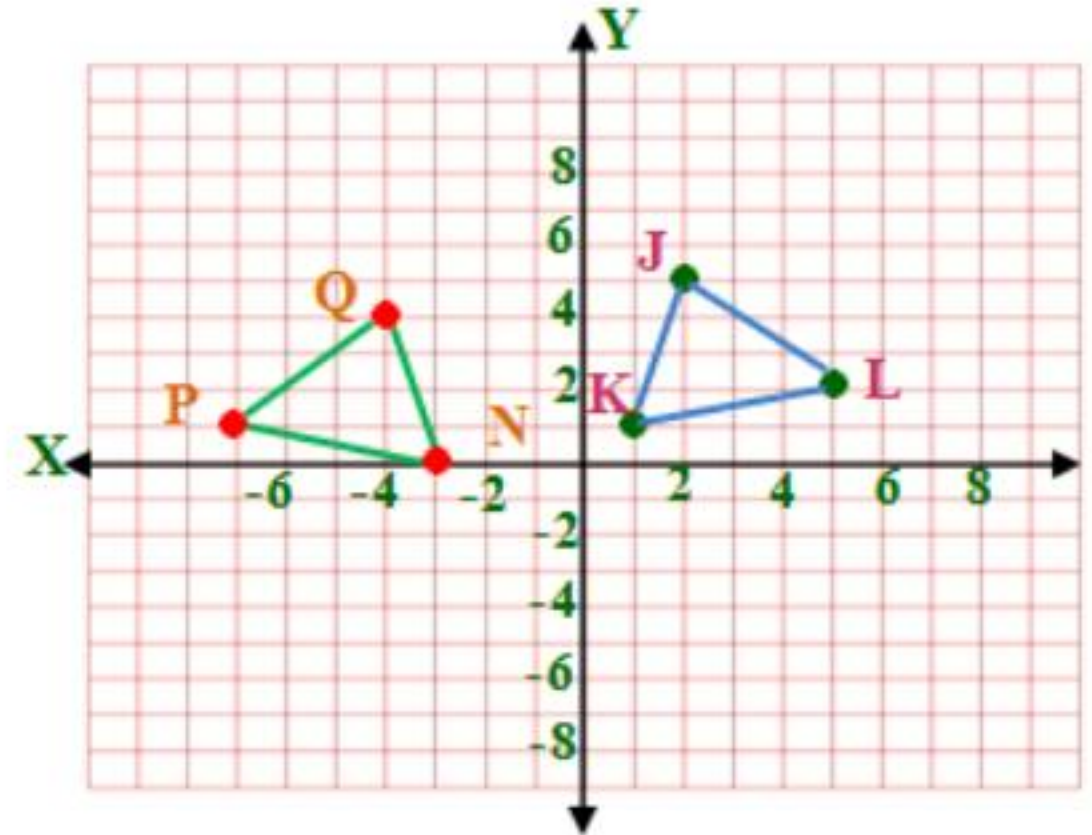


(1)





(A) (2)



(B) يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك يمكن أن نخمن أن المثلثين متطابقان.

(C)

$$K (1,1), L (5,2)$$

$$d_{(K,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2}$$

$$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$J (2,5), K (1,1)$$

$$d_{(J,K)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-5)^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$J(5,2), L(2,5)$$

$$d_{(J,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (5-2)^2}$$

$$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$JK = \sqrt{17}, KL = \sqrt{17}, JL = \sqrt{18}$$

أطوال $\triangle NPQ$

$$P(-7,1), Q(-4,4)$$

$$d_{(P,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - (-7))^2 + (4 - 1)^2}$$

$$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$N(-3,0), P(-7,1)$$

$$d_{(N,P)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7 - (-3))^2 + (1 - 0)^2}$$

$$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$N(-3,0), Q(-4,4)$$

$$d_{(N,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - (-3))^2 + (4 - 0)^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$PQ = \sqrt{18}, NP = \sqrt{17}, NQ = \sqrt{17}$$

نلاحظ أن $NQ = KJ$, $LK = PN$, $JL = QP$ ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة. وعليه، فإن $\Delta JKL \cong \Delta QNP$ حسب SSS



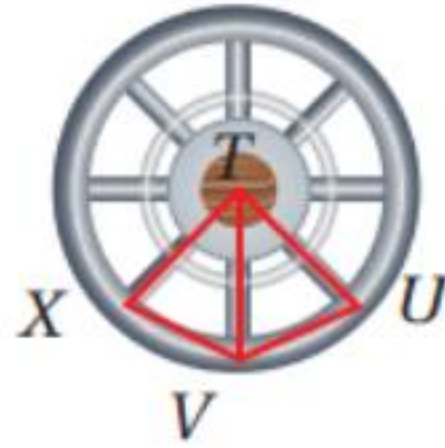
(3) طيران شرعي:



المبررات	العبارات
معطي	$\angle FGH$ تنصف $\overline{JG}$ ، $\overline{FG} \cong \overline{GH}$
تعريف منصف الزاوية	$\angle FGJ = \angle HGJ$
خاصية الانعكاس للتطابق	$JG = JG$
SAS	$\Delta FGJ = \Delta HGJ$



(4)



$$\angle XTV \cong \angle VTU \text{ معطى } \overline{TU} \cong \overline{TX} \quad (1)$$

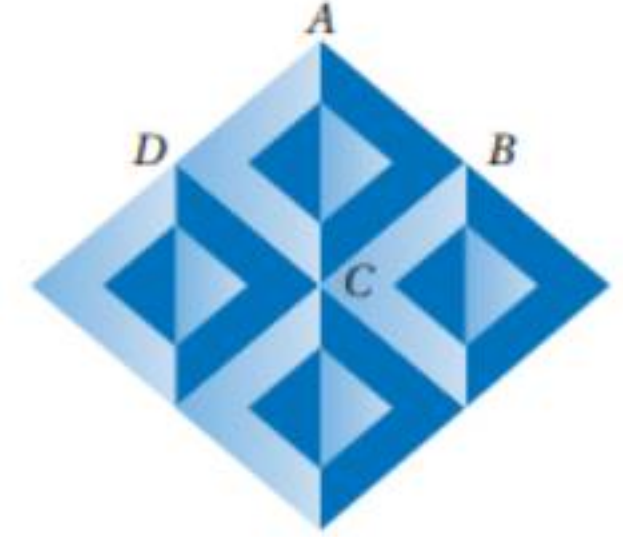
$$m \angle XTV = m \angle UTV \text{ (تعريف الزوايا المتطابقة)} \quad (2)$$

$$\overline{TV} \cong \overline{TV} \text{ (خاصية الانعكاس)} \quad (3)$$

$$\Delta XTV \cong \Delta UTV \text{ (SAS)} \quad (4)$$



1) الخداع البصري: المثال ١



(a) عدد المثلثات المختلفة = ٢

(b)

(1) $AB = CD, DA \cong BC$ (معطيات)

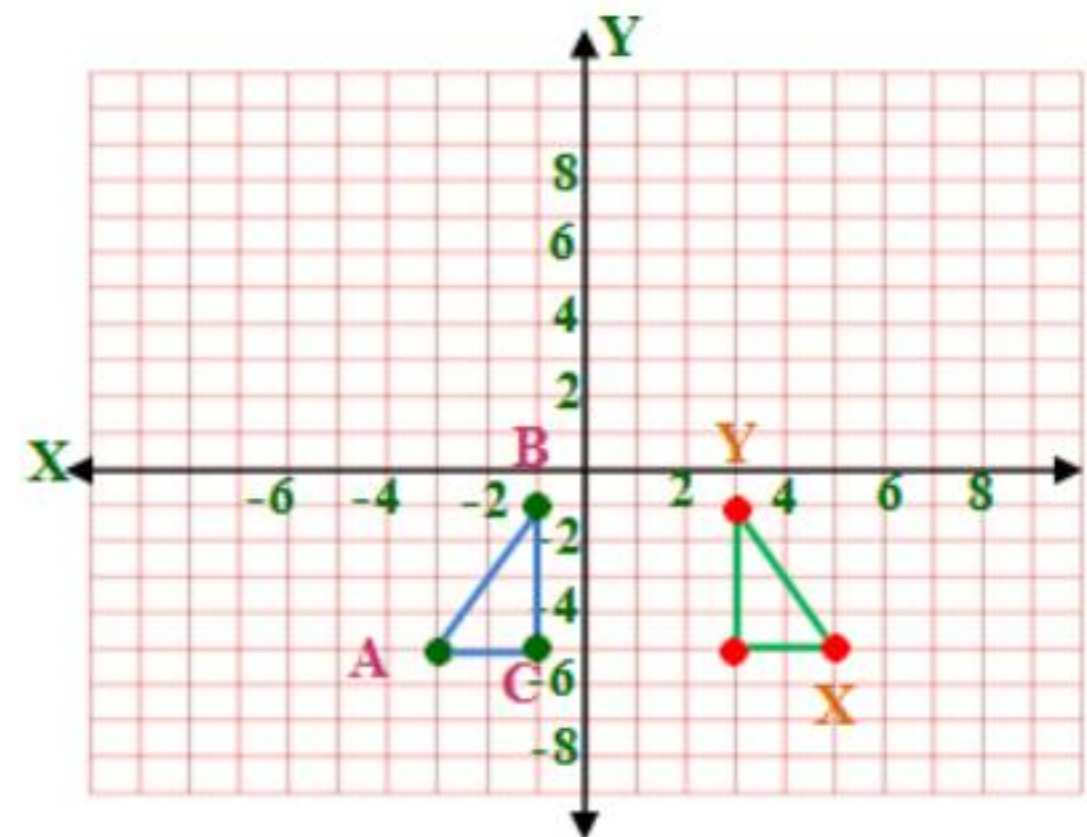
(2) $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{DA} \cong \overline{BC}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

(3) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ (خاصية الانعكاس في التطابق)

(4) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (SSS)

2) إجابة مطولة: المثال ٢

(a)



(b) يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك يمكن أن نخمن أن المثلثين متطابقان

(c)

أطوال $\triangle ABC$

$$A(-3, -5), B(-1, -1)$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (-1 - (-5))^2}$$

$$\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$B(-1, -1), C(-1, -5)$$

$$d_{(B,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (-5 - (-1))^2}$$

$$\sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4$$

$$A(-3, -5), C(-1, -5)$$

$$d_{(A,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (-5 - (-5))^2}$$

$$\sqrt{4 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$AB = \sqrt{20}, BC = 4, AC = 2$$

أطوال $\triangle XYZ$

$$X (5,-5), Y (3,-1)$$

$$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (-1-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$Y (3,-1), Z (3,-5)$$

$$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (-5-(-1))^2}$$

$$\sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$$

$$X (5,-5), Z (3,-5)$$

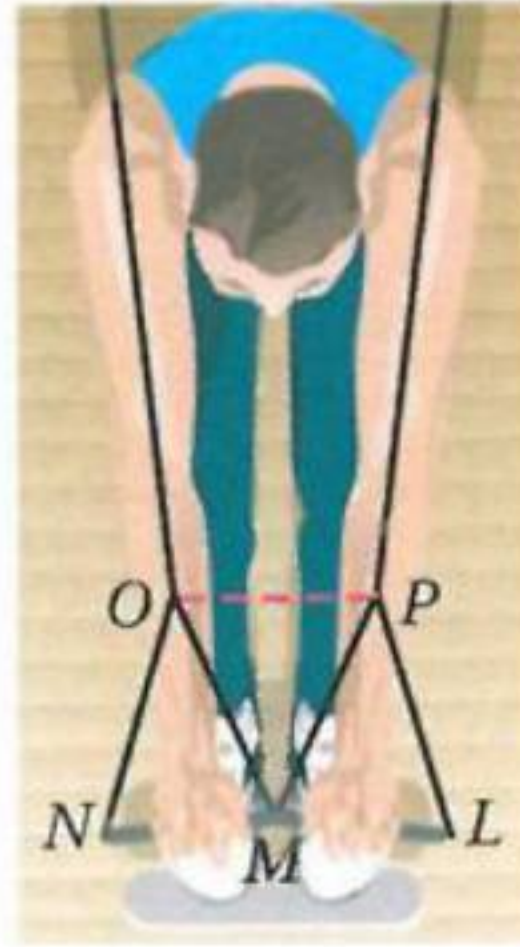
$$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (-5-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+0} = 2$$

$$XY = \sqrt{20}, YZ = 4, XZ = 2$$

نلاحظ أن $XZ = AC$, $YZ = BC$, $XY = AB$ ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة. وعليه، فإن $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$ حسب SSS

(3) رياضة: المثال ٣



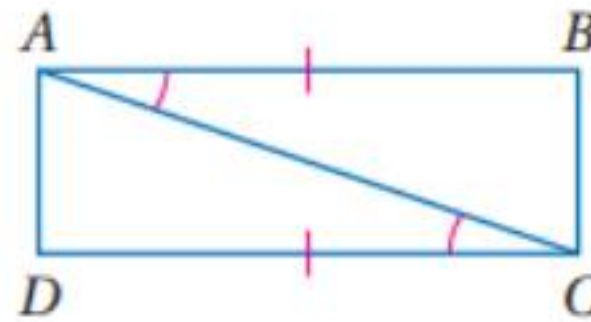
نعلم أن $\overline{LP} \cong \overline{NO}$, $\angle LPM \cong \angle NOM$

وبما أن $\triangle MOP$ متطابق الأضلاع

فإن $\overline{MO} \cong \overline{MP}$ من تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

ولذلك فإن $\triangle LMP \cong \triangle NMO$ حسب مسلمة التطابق SAS

(4) اكتب برهان ذا عمودين: مثال؛



(1) $\overline{BA} \cong \overline{DC}$, $\angle BAC \cong \angle DCA$ (معطيات)

(2) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

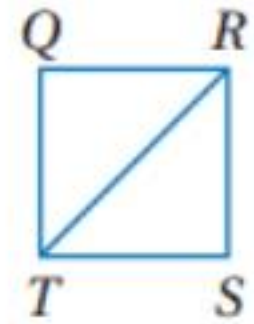
(3) $\triangle BCA \cong \triangle DAC$ (SAS)

(4) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

تدرب وحل المسائل

برهان: اكتب برهاناً من النوع المذكور في كل من السؤالين الآتيين: المثال ١

(5)

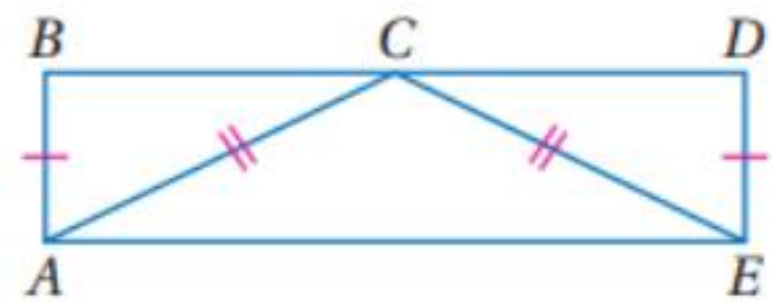


$$QR = SR, ST = QT$$

$RT = RT$ حسب خاصية الانعكاس

$$\triangle QRT \cong \triangle SRT \text{ حسب } SSS$$

(6)



$$AB = ED, CA = CE$$

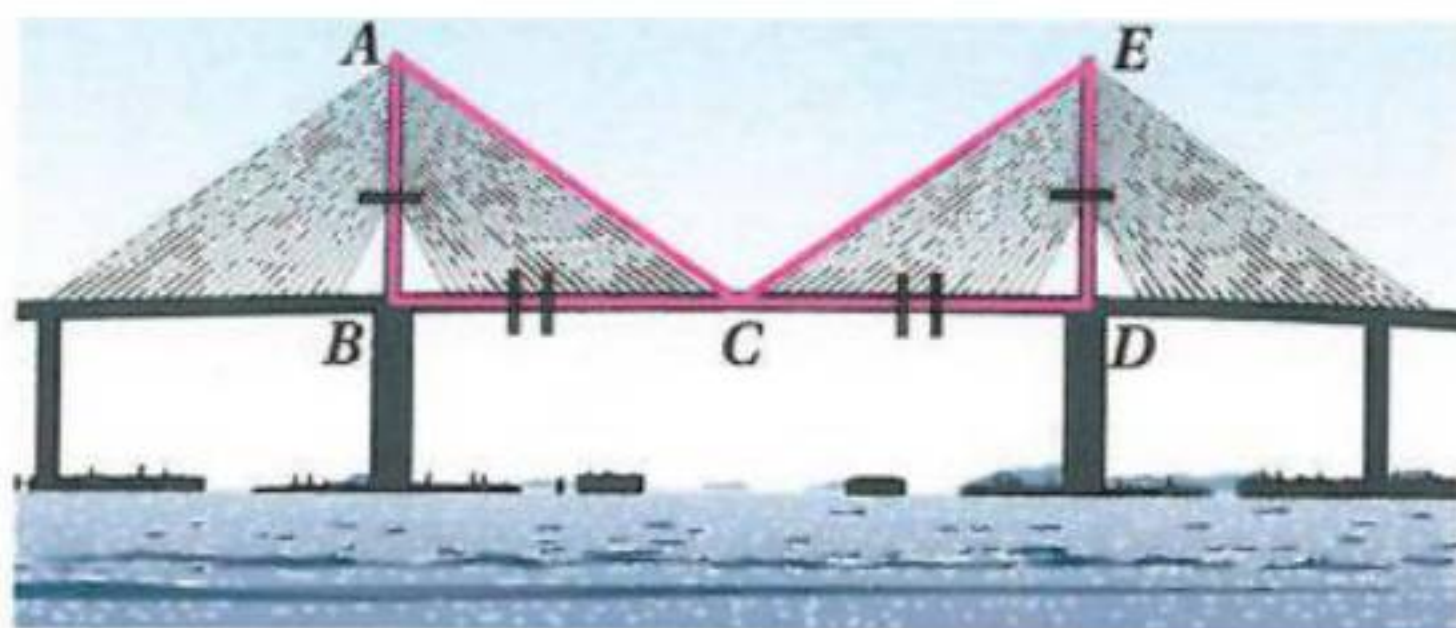
AC تنصف BD

C منتصف BD

$$BC = CD$$

$$\triangle ABC \cong \triangle EDC \text{ حسب } SSS$$

(7) جسر:



(1) $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ ، $\angle ABC$ و $\angle EDC$ قائمتان، C نقطة منتصف $\overline{BD}$ (معطيات)

(2) $\angle ABC \cong \angle EDC$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

(3) $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ (نظرية نقطة المنتصف)

(4) $\triangle CDE \cong \triangle ABC$ حسب (SAS)

حدد ما إذا كان $\triangle MNO = \triangle QRS$ في كل من السؤالين الآتيين: المثال ٢

(8)

$\triangle QRS$

$Q(-4,4), R(-7,1)$

$$d_{(Q,R)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7 - (-4))^2 + (1 - 4)^2}$$

$$\sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

$$R(-7,1), S(-3,0)$$

$$d_{(R,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3 - (-7))^2 + (0 - 1)^2}$$

$$\sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$Q(-4,4), S(-3,0)$$

$$d_{(Q,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3 - (-4))^2 + (0 - 4)^2}$$

$$\sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$QR = \sqrt{18}, RS = \sqrt{17}, QS = \sqrt{17}$$

$$\Delta MNO$$

$$M(2,5), N(5,2)$$

$$d_{(M,N)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$\sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

$$N(5,2), O(1,1)$$

$$d_{(N,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (1 - 2)^2}$$

$$\sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$M (2,5), O (1,1)$$

$$d_{(M,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-5)^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$MN = \sqrt{18}, NO = \sqrt{17}, MO = \sqrt{17}$$

$$MN = \sqrt{18}, NO = \sqrt{17}, MO = \sqrt{17}$$

$$QR = \sqrt{18}, RS = \sqrt{17}, QS = \sqrt{17}$$

بما أن كل زوج من الأضلاع المتناظرة متساويان في الطول فإنهما متطابقان إذن

$$\Delta QRS \cong \Delta MNO \text{ حسب } SSS$$

(9)

$$\Delta QRS$$

$$Q (3,-3), R (4,-4)$$

$$d_{(Q,R)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (-4-(-3))^2}$$

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$R (4,-4), S (3,3)$$

$$d_{(R,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (3-(-4))^2}$$

$$\sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$$Q(3, -3), S(3, 3)$$

$$d_{(Q,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 3)^2 + (3 - (-3))^2}$$

$$\sqrt{0 + 36} = 6$$

$$QR = \sqrt{2}, RS = \sqrt{50}, QS = 6$$

$$\triangle MNO$$

$$M(0, -1), N(-1, -4)$$

$$d_{(M,N)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-4 - (-1))^2}$$

$$\sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$N(-1, -4), O(-4, -3)$$

$$d_{(N,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (-3 - (-4))^2}$$

$$\sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$M (0,-1), O (-4,-3)$$

$$d_{(M,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (-1 - (-3))^2}$$

$$\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

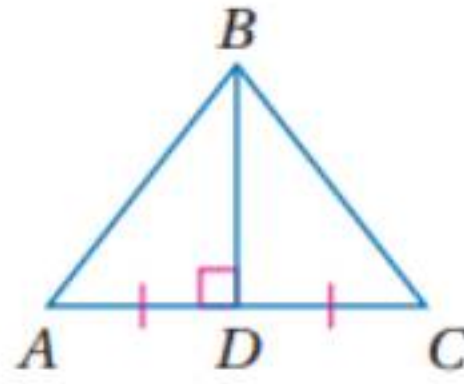
$$MN = \sqrt{10}, NO = \sqrt{10}, MO = \sqrt{20}$$

$$QR = \sqrt{2}, RS = \sqrt{50}, QS = 6$$

بما أن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة، فإن المثلثين ليسا متطابقين

برهان: اكتب برهاناً من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين: المثال ٣

(10) برهان ذو عمودين



(1) $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$ (معطيات)

(2) $\angle BDA, \angle BDC$ قائمتان (تعريف التعامد)

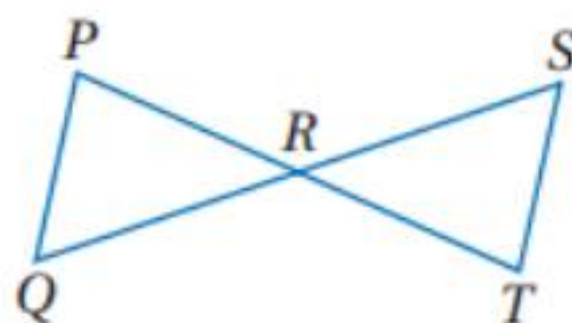
(3) $\angle BDA \cong \angle BDC$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

(4) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$ (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

(5) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

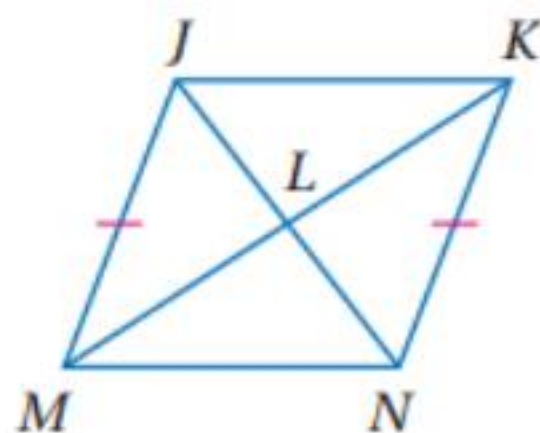
(6) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ حسب مسلمة (SAS)

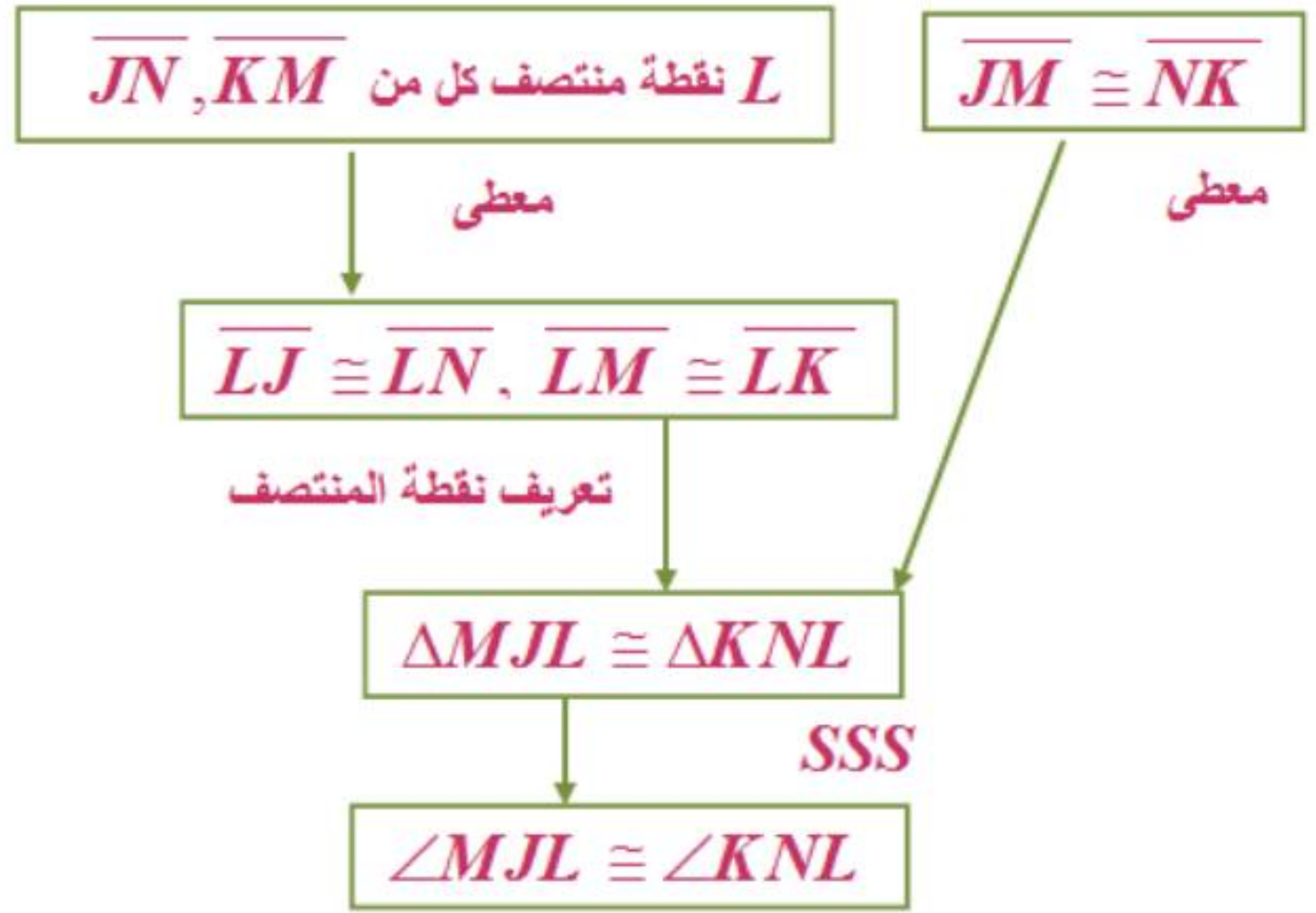
(11)



بما أن R نقطة المنتصف لكل من $\overline{QS}$, $\overline{PT}$ ، فإن $\overline{PR} \cong \overline{RT}$ و $\overline{RQ} \cong \overline{RS}$ من تعريف نقطة المنتصف، وكذلك $\angle PRQ \cong \angle TRS$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
إذن $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$ حسب مسلمة (SAS)

(12) برهان: اكتب برهانا تسلسلياً المثال؛

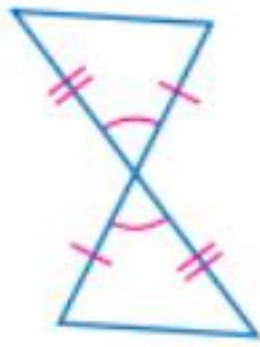




العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين

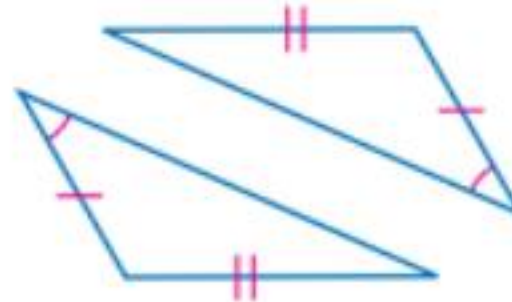
حدد ما إذا كان المثلثين في كل من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا. وضح إجابتك.

(١٥)



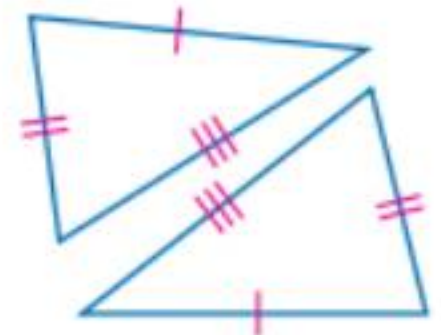
متطابقين (مسلمة): SAS

(١٤)



لا يوجد تطابق

(13)



متطابقين (مسلمة): SSS

(16) إشارة تحذيرية: استعمل الشكل المجاور.



(a) الجسم يسمى: هرم

(b)

$$(1) \overline{AB} \cong \overline{AD} \text{ و } \overline{CB} \cong \overline{DC} \text{ (معطيات)}$$

$$(2) \overline{AC} \cong \overline{AC} \text{ (خاصية الانعكاس للتطابق)}$$

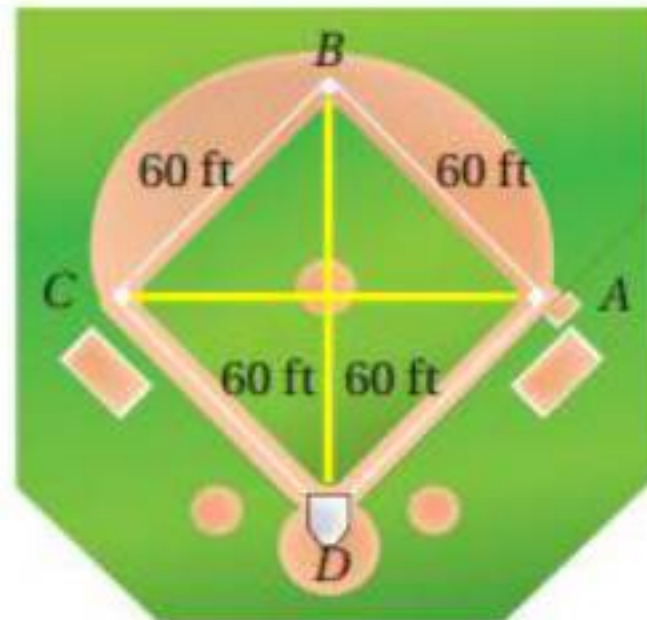
$$(3) \triangle ACB \cong \triangle ACD \text{ حسب مسلمة (SSS)}$$

(c) المجسم ثلاثي الأبعاد ولذلك عندما يتم رسمه في المستوي الثنائي الأبعاد فإن الرسم المنظوري يجعله يبدو وكأن المثلثين مختلفان.

(١٧) برهان



(18) في الشكل المجاور $ABCD$ مربع:



(a)

$$(1) \overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC} \text{ (معطيات)}$$

$$(2) \angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB \text{ قوائم (معطيات)}$$

$$(3) \angle BCD \cong \angle CDA \text{ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)}$$

$$(4) \triangle BCD \cong \triangle CDA \text{ حسب مسلمة (SAS)}$$

$$(5) \overline{DB} \cong \overline{AC} \text{ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)}$$

(b)

$$(1) \overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC} \text{ (معطيات)}$$

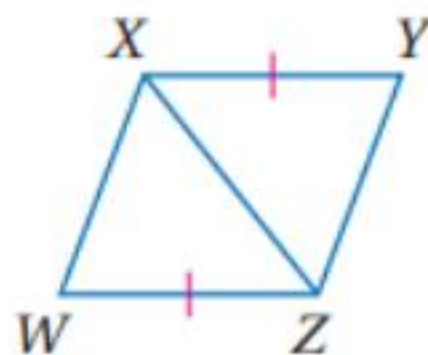
$$(2) \angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB \text{ قوائم (معطيات)}$$

$$(3) \angle BCD \cong \angle BAD \text{ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)}$$

$$(4) \triangle BCD \cong \triangle BAD \text{ حسب مسلمة (SAS)}$$

$$(5) \angle BDC \cong \angle BDA \text{ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)}$$

(19) برهان: اكتب برهان ذا عمودين.



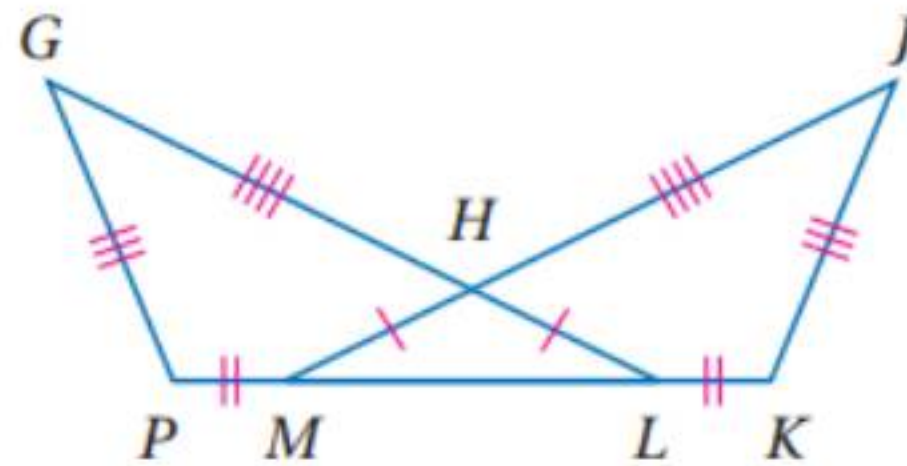
$$(معطيات) \overline{YX} = \overline{WZ}, \overline{YX} \perp \overline{ZW}$$

$\angle YXZ = \angle WZX$ (زاويتان متبادلتان داخليا)

$XZ = XZ$ (خاصية الانعكاس)

$\Delta YXZ = \Delta WZX$ حسب مسلمة (SAS)

(20) برهان: اكتب برهاننا حر:



$GH = JH, PG = KJ, HL = HM, PM = KL$

بما أن $GH = JH$ و $HL = HM$ إذن $GL = JM$

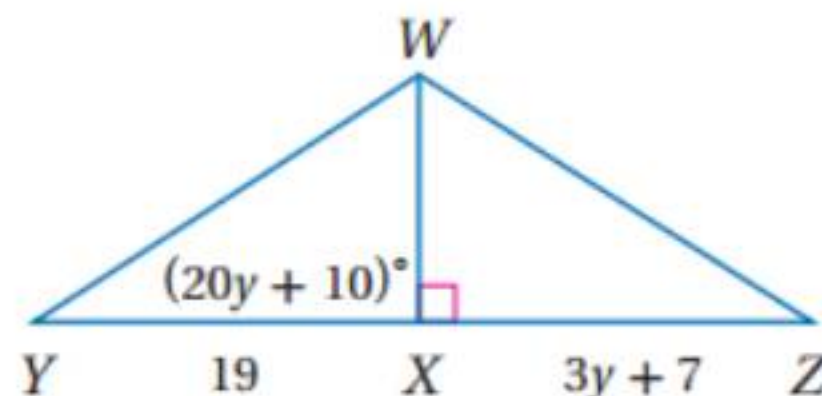
بما أن $PM = KL, GL = JM$ إذن $PL = KM$

إذن $\Delta GPL \cong \Delta JKM$

إذن $\angle G \cong \angle J$

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

21)



$$\therefore \triangle WXY \cong \triangle WXZ$$

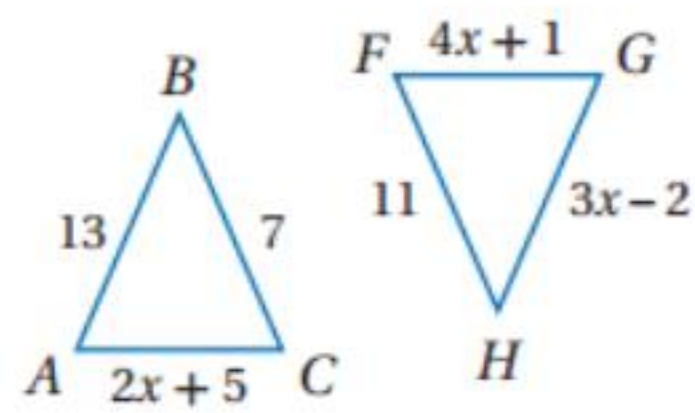
$$\therefore XZ = XY$$

$$3y + 7 = 19$$

$$3y = 12$$

$$y = 4$$

22)



$$\therefore \triangle FGH \cong \triangle ABC$$

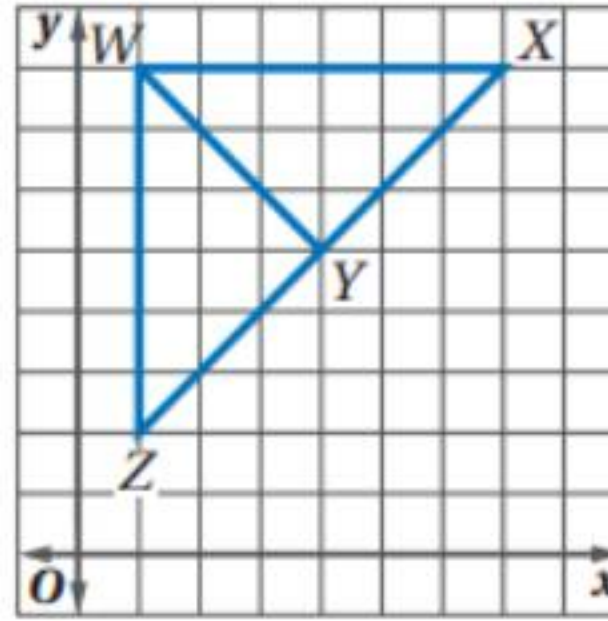
$$\therefore GH = BC$$

$$3x - 2 = 7$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

(23) تحد:



(a)

الطريقة الأولى: تستعمل صيغة المسافة لإيجاد طول ضلع من الأضلاع، ثم تستعمل مسلمة التطابق SSS.

الطريقة الثانية: يمكن أن تجد ميل كل من $\overline{ZX}$, $\overline{WY}$ وتبرهن أنهما متعامدان، وبذلك تكون $\angle WYZ$, $\angle WYX$ كلتاهما قائمتين. ويمكن استعمال صيغة المسافة لإثبات أن XY تطابق YZ . وبما أن المثلثين يشتركان في الضلع $\overline{WY}$ ، فيمكن استعمال مسلمة SAS لإثبات تطابق المثلثين.

أعتقد أن الطريقة الثانية أفضل لأن فيها خطوتين بدل من ثلاث خطوات كما في الطريقة الأولى.

(b)

$$Y (4,5), W (1,8)$$

$$m_{(YW)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 5}{1 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$Z (1,2), X (7,8)$$

$$m_{(ZX)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 2}{7 - 1} = \frac{6}{6} = 1$$

ميل $\overline{WY}$ يساوي -1 وميل $\overline{ZX}$ يساوي ١ ، وبما أن ناتج ضربهما يساوي -1

فإن $\overline{WY} \perp \overline{ZX}$. وبما أنهما متعامدان فإن قياس كل من $\angle WYX$ و $\angle WYZ$

يساوي 90° . وباستعمال صيغة المسافة تجد أن طول $\overline{ZY}$ يساوي

$$\overline{ZY} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

وكذلك طول $\overline{XY}$ يساوي

$$\overline{XY} = \sqrt{(4-7)^2 + (5-8)^2} = 3\sqrt{2}$$

وبما أن $\overline{WY} \cong \overline{XY}$ ، فإن $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$ حسب مسلمة التطابق SAS.

(24) اكتشف الخطأ:

خالد، لان الزاوية يجب أن تكون محصورة، والزاوية هنا ليست محصورة

(25) اكتب:

نعم، الحالة الأولى: إذا علمت أن الوترين متطابقان وكان أحد ضلعي القائمة في الأول يطابق الضلع المناظر له في الثاني فسيكون ضلعا القائمة الآخرين متطابقين حسب نظرية فيثاغورث، ولذلك يكون المثلثان متطابقين حسب SSS.

الحالة الثانية: إذا علمت أن ضلعي القائمة في المثلث الأول يطابقان ضلعي القائمة في المثلث الثاني، فسوف يكون المثلثان متطابقين بحسب SAS

26) C

$$\overline{BC} \cong \overline{YZ}$$

27) C

$$-2a + b = -7$$

$$-2a + (-1) = -7$$

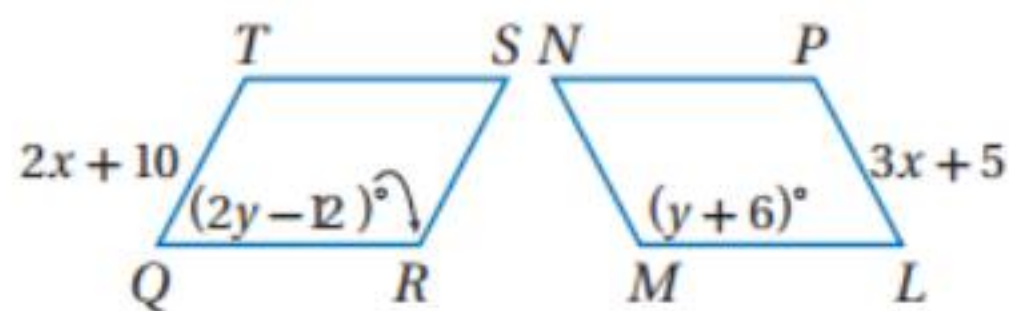
$$-2a = -7 + 1$$

$$-2a = -6$$

$$a = 3$$

مراجعة تراكمية

فى الشكلين المجاورين، فأوجد:



28)

$$\therefore LMNP \cong QRST$$

$$LP = QT$$

$$3x + 5 = 2x + 10$$

$$x = 5$$

29)

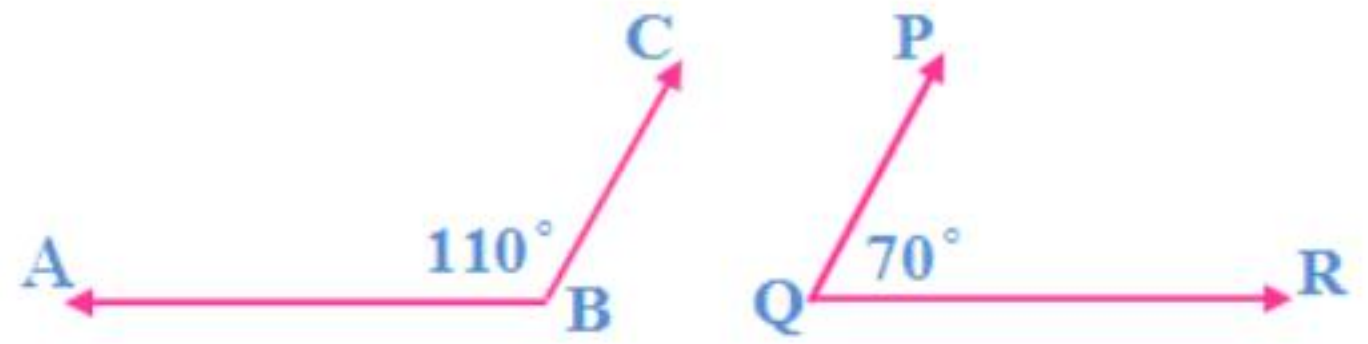
$$\angle LMN = \angle QRS$$

$$y + 6 = 2y - 12$$

$$y = 18$$

(30) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي:

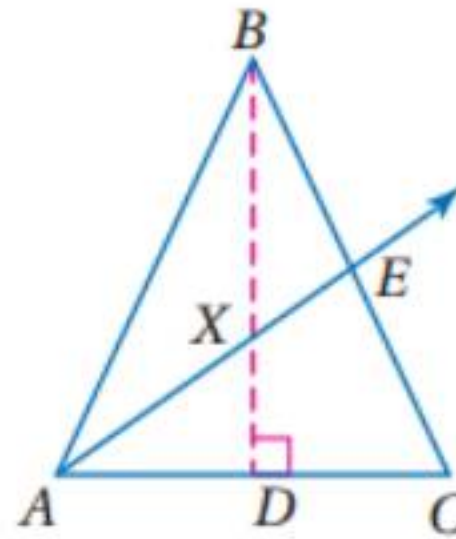
العكس: إذا كانت الزاويتان متكاملتان فإنهما متجاورتان على مستقيم، صحيحة.
عكس العبارة الشرطية: إذ لم تكن الزاويتان متجاورتان على مستقيم فإنهما غير متكاملتان، عبارة خاطئة. والمثال المضاد هو:
 $\angle PQR, \angle ABC$ زاويتان متكاملتان، ولكنهما غير متجاورتين على مستقيم.



المعاكس الإيجابي: إذ لم تكن الزاويتان متكاملتان فإنهما غير متجاورتان على مستقيم وهي عبارة صحيحة.

استعد للدرس اللاحق

إذا علمت أن BD , AE ينصفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:



$\overline{BE}$ (31)

$\angle CBD$ (32)

$\angle BDA$ (33)

$\overline{CD}$ (34)

(1) هندسة إحداثية:

$$A(-2, -1), B(-1, 3)$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - (-2))^2 + (3 - (-1))^2}$$

$$\sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$B(-1, 3), C(2, 0)$$

$$d_{(B,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (0 - 3)^2}$$

$$\sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

$$A(-2, -1), C(2, 0)$$

$$d_{(A,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (0 - (-1))^2}$$

$$\sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ إذن المثلث متطابق الضلعين

(2) اختيار من متعدد: A

$$\overline{RS} \cong \overline{RQ}$$

$$3y - 1 = y + 11$$

$$2y = 12$$

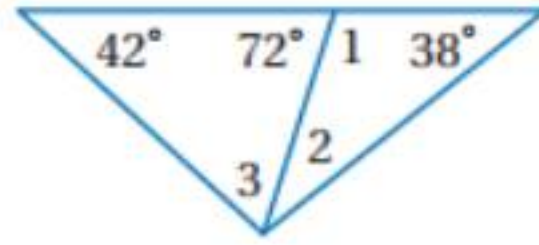
$$y = 6$$

$$\overline{RS} = y + 11 = 6 + 11 = 17$$

$$\overline{RQ} = 3y - 1 = 3 \times 6 - 1 = 17$$

$$\overline{QS} = 4y - 9 = 4 \times 6 - 9 = 15$$

أوجد كلا من قياسات الزوايا الآتية:

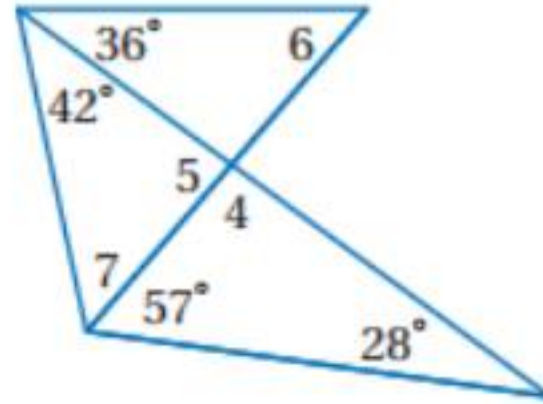


3) $m \angle 1 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

4) $m \angle 2 = 180^\circ - (108^\circ + 38^\circ) = 34^\circ$

5) $m \angle 3 = 180^\circ - (72^\circ + 42^\circ) = 66^\circ$

أوجد كلا من قياسات الزوايا الآتية:



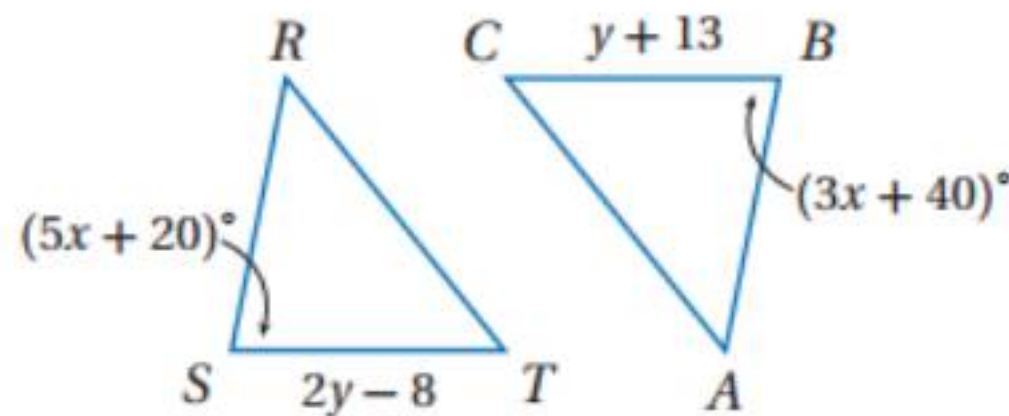
6) $m \angle 4 = 180^\circ - (57^\circ + 28^\circ) = 95^\circ$

7) $m \angle 5 = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$

8) $m \angle 6 = 180^\circ - (95^\circ + 36^\circ) = 49^\circ$

9) $m \angle 7 = 180^\circ - (42^\circ + 85^\circ) = 53^\circ$

في الشكلين أدناه، إذا علمت أن $\triangle RST \cong \triangle ABC$ فأوجد:



10)

$$\triangle RST \cong \triangle ABC$$

$$\overline{RS} = \overline{AB}$$

$$5x + 20 = 3x + 40$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

11)

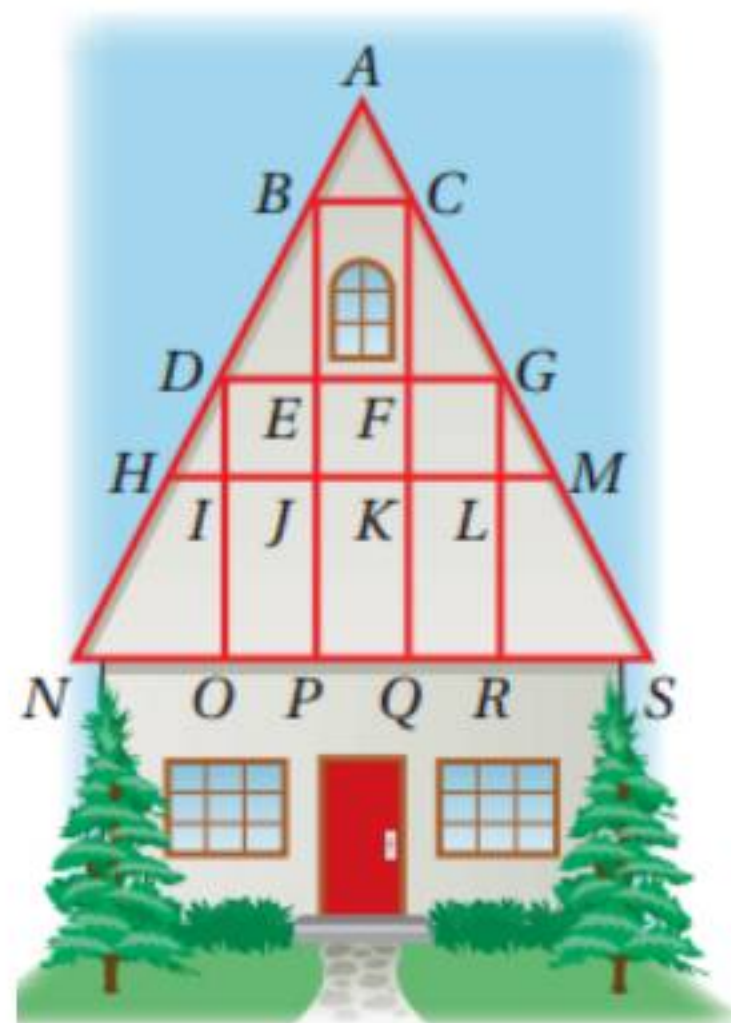
$$\triangle RST \cong \triangle ABC$$

$$\overline{ST} = \overline{BC}$$

$$2y - 8 = y + 13$$

$$y = 21$$

(12) فن العمارة:

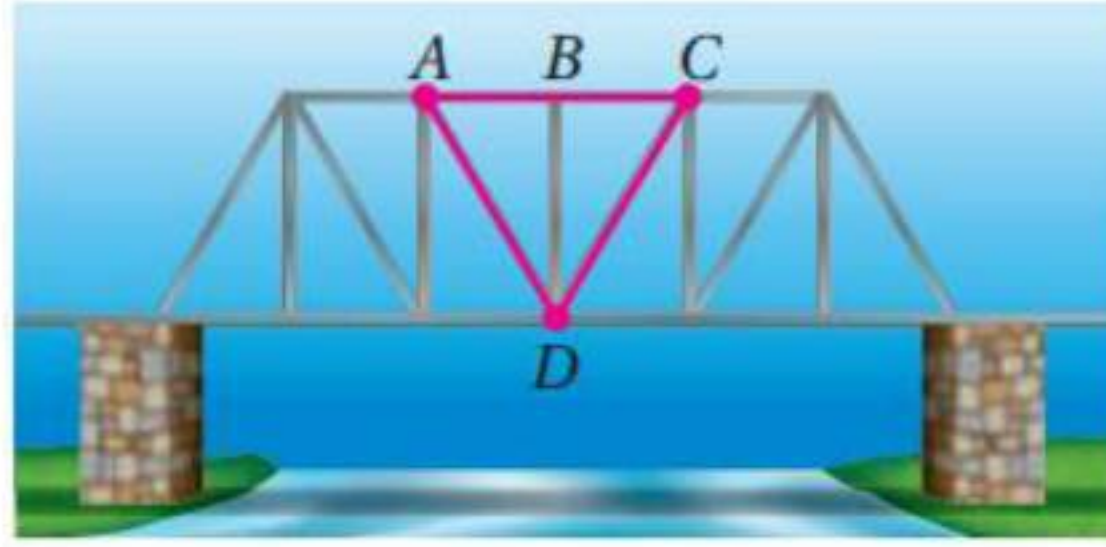


$$\triangle BED = \triangle CFG, \triangle BJH \cong \triangle CKM, \triangle BPN \cong \triangle CQS$$

$$\Delta DIH = \Delta GLM, \Delta DON = \Delta GRS$$

(13) اختيار من متعدد: $\angle XCB \cong \angle LSM$: D

(14) جسر:



$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ وبما أن B نقطة في منتصف $\overline{AC}$ إذن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

وبما أن $\overline{DB} \perp \overline{AC}$ إذن $\angle CBD \cong \angle ABD$

إذن يوجد ضلعين وزاوية محصورة بينهم في $\triangle ABD$ يناظرهم ضلعين وزاوية محصورة بينهم في $\triangle CBD$ و بحسب نظرية SAS يمكن إثبات أن المثلثين متطابقين.

حدد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ في كل من السؤالين الآتيين:

15)

$P(3, -5), Q(11, 0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(11 - 3)^2 + (0 - (-5))^2}$$

$$\sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$$

$Q(11, 0), R(1, 6)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 - 11)^2 + (6 - 0)^2}$$

$$\sqrt{100 + 36} = 2\sqrt{34}$$

$P(3, -5), R(1, 6)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (6 - (-5))^2}$$

$$\sqrt{4 + 121} = 5\sqrt{5}$$

$$X (5,1), Y (13,6)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(13 - 5)^2 + (6 - 1)^2}$$

$$\sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$$

$$Y (13,6), Z (3,12)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 13)^2 + (12 - 6)^2}$$

$$\sqrt{100 + 36} = 2\sqrt{34}$$

$$X (5,1), Z (3,12)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 5)^2 + (12 - 1)^2}$$

$$\sqrt{4 + 121} = 5\sqrt{5}$$

نعم، بما أن جميع الأطوال المتناظرة متساوية إذن $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$.

16)

$$P (-3,-3), Q (-5,1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (1 - (-3))^2}$$

$$\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$Q (-5,1), R (-2,6)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - (-5))^2 + (6 - 1)^2}$$

$$\sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$P (-3,-3), R (-2,6)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - (-3))^2 + (6 - (-3))^2}$$

$$\sqrt{1 + 81} = \sqrt{82}$$

$$X (2, -6), Y (3, 3)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - (-6))^2}$$

$$\sqrt{1 + 81} = \sqrt{82}$$

$$Y (3, 3), Z (5, -1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-1 - 3)^2}$$

$$\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

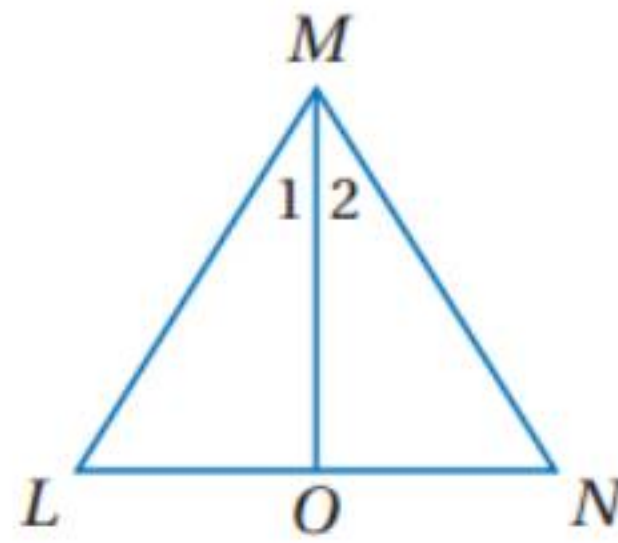
$$X (2, -6), Z (5, -1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (-1 - (-6))^2}$$

$$\sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

بما أن ليس جميع الأضلاع المتناظرة متساوية إذن ΔXYZ لا يطابق ΔPQR

(17) اكتب برهاننا إذا عمودين:

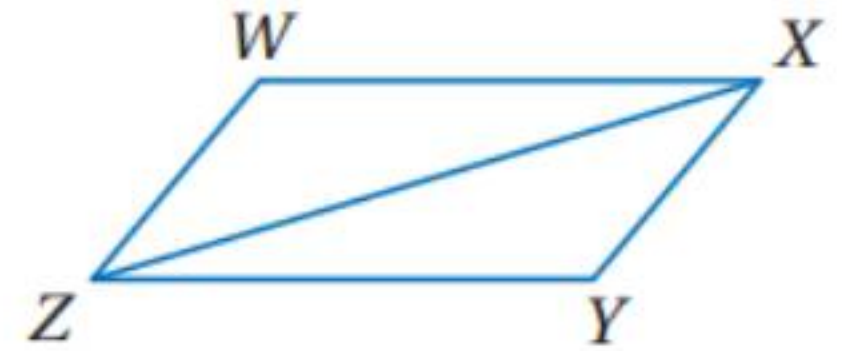


المبررات	العبارات
معطيات	ΔLMN متطابق الضلعين في $LM = NM$
معطي	MO تنصف ΔLMN
تعريف منصف الزاوية	$\angle 1 = \angle 2$
خاصية الانعكاس	$MO = MO$
SAS	$\Delta MLO = \Delta MNO$

إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS 3-5



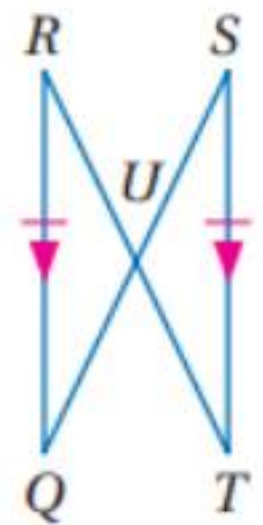
(1)

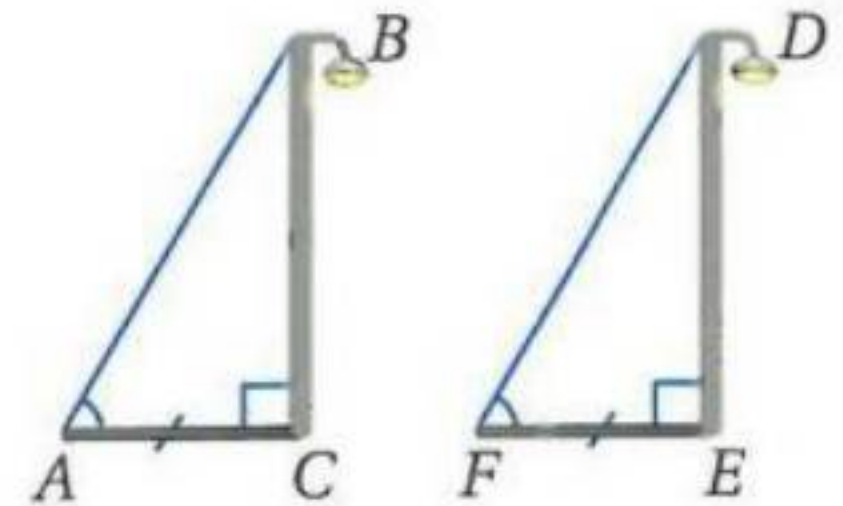
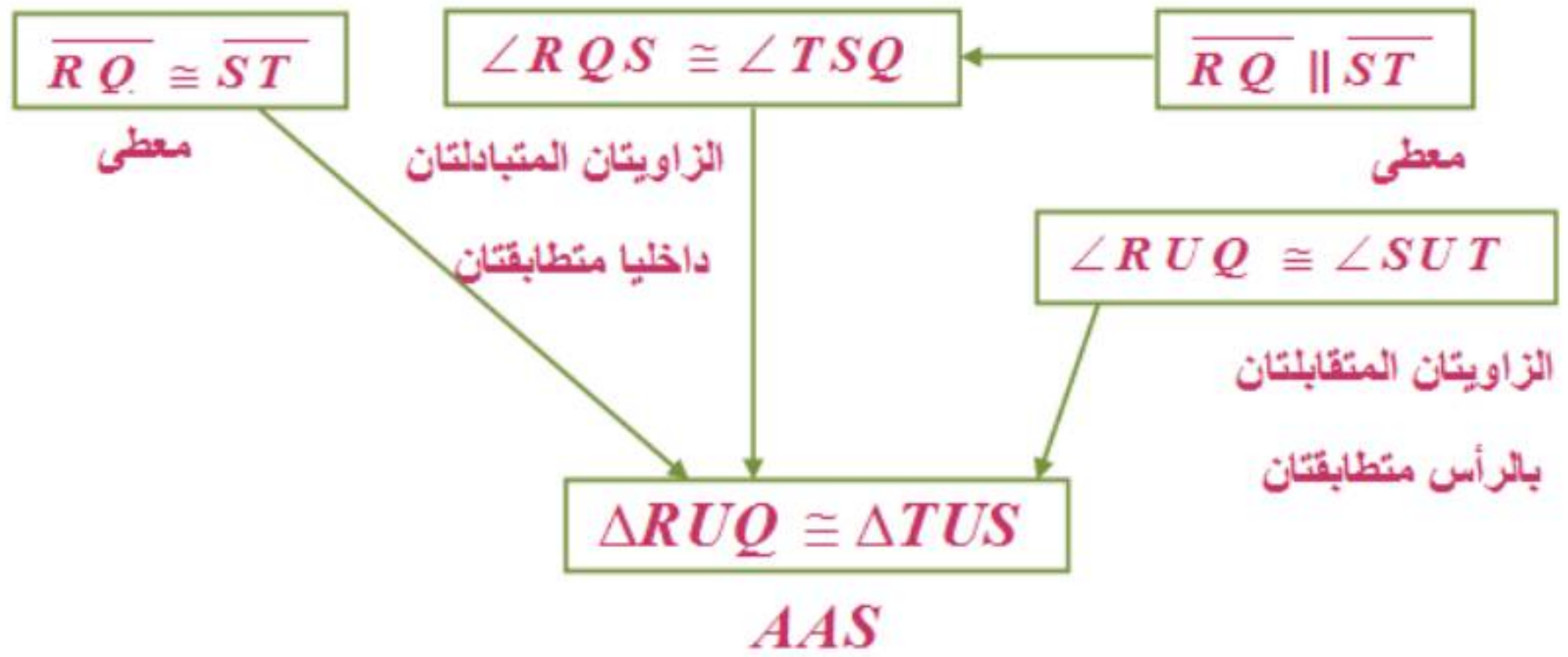


بما أن $\overline{ZX}$ تنصف $\angle WZY$ إذن $\angle WZX = \angle XZY$
وبما أن $\overline{XZ}$ تنصف $\angle YXW$ إذن $\angle YXZ = \angle WXZ$
وبما أن $\overline{ZX} \cong \overline{ZX}$ حسب خاصية الانعكاس للتطابق
إذن $\triangle WXZ \cong \triangle XZY$ حسب ASA



(2)





بما أن $\angle BCA \cong \angle DEF$ إذن $\overline{BC} \perp \overline{AC}$, $\overline{DE} \perp \overline{FE}$
وبما أن $AB = CD$ معطى و $\angle BAC = \angle DFE$

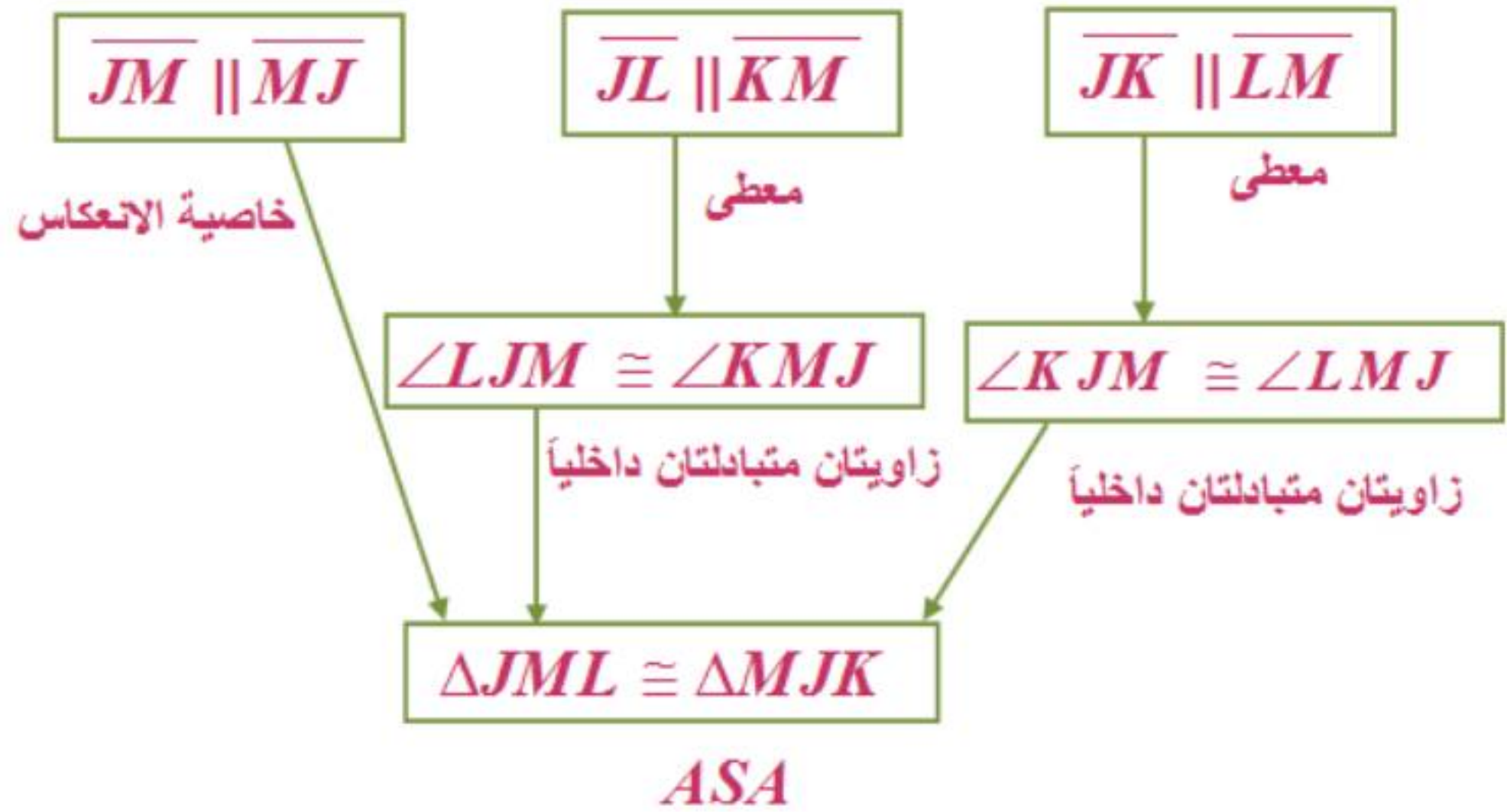
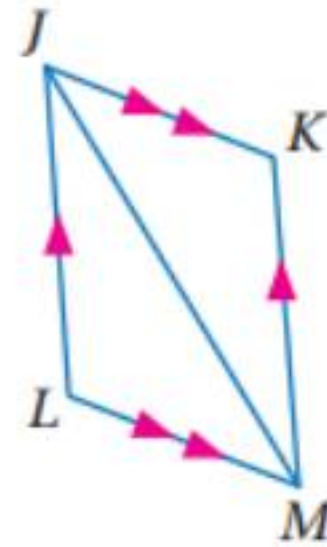
بحسب المسلمة AAS فان $\triangle BAC \cong \triangle DFE$

لذا $BC = DE$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

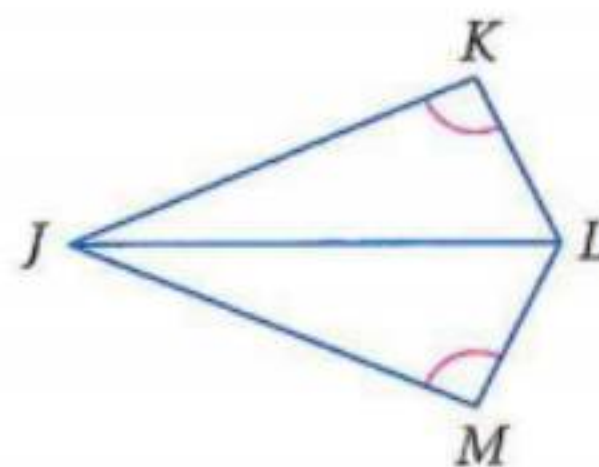


برهان:

(1)



(2)



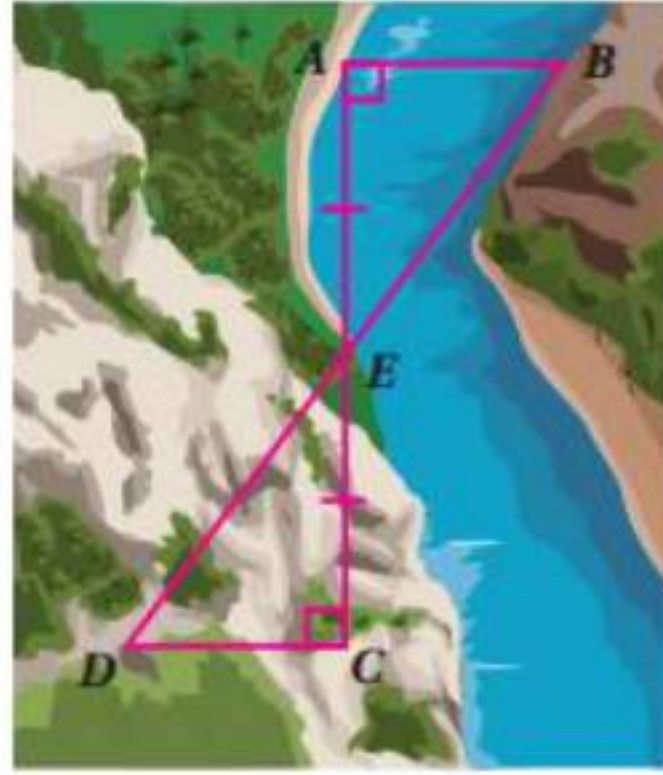
$\angle KLM$ تتصف $\overline{JL}$ ، $\angle K \cong \angle M$

بما أن $\overline{JL}$ تتصف $\angle KLM$ فإن $\angle KLJ \cong \angle MLJ$. لذا

$\triangle JKL \cong \triangle JML$ حسب نظرية التطابق AAS .

(3) بناء جسر:

(a)



نعلم أن $\angle BAE, \angle DCE$ متطابقتان. لأنهما زاويتان قائمتان، $\overline{AE}$ تطابق $\overline{EC}$ بحسب نظرية نقطة المنتصف. ومن نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، نعلم أن $\angle DEC \cong \angle BEA$. وبحسب ASA ، يعلم المساح أن $\triangle DCE \cong \triangle BAE$ ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإن $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ، ولذا يمكن للمساح أن يقيس $\overline{DC}$ وبذلك يعرف المسافة بين A, B

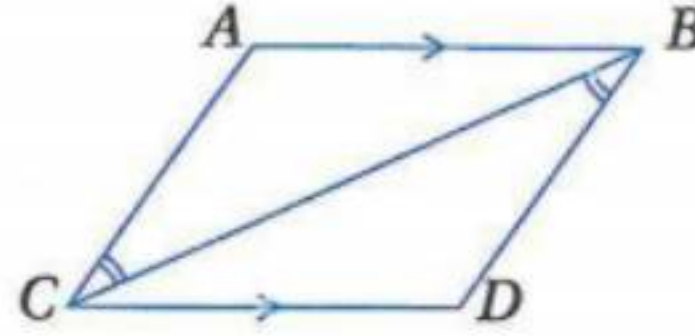
(b)

المسافة بين النقطة $A, B = 60$ m لأن $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ بحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة

تدرب وحل المسائل

برهان: اكتب برهاناً حراً: المثال ١

(4)



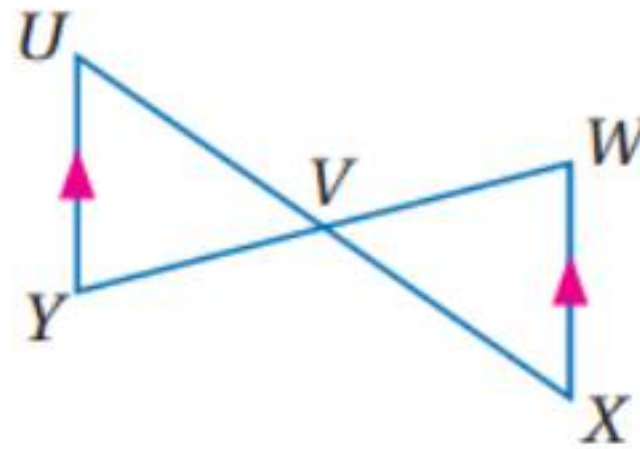
بما أن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ إذن $\angle ABC \cong \angle BCD$

$\angle CBD \cong \angle BCA$ ، $\overline{CB}$ ضلع مشترك

$\triangle CAB \cong \triangle BDC$ بحسب مسلمة التطابق ASA

برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين. المثال ٢

(5)



(1) V نقطة منتصف $\overline{YW}$ ، $\overline{UY} \parallel \overline{XW}$ (معطيات)

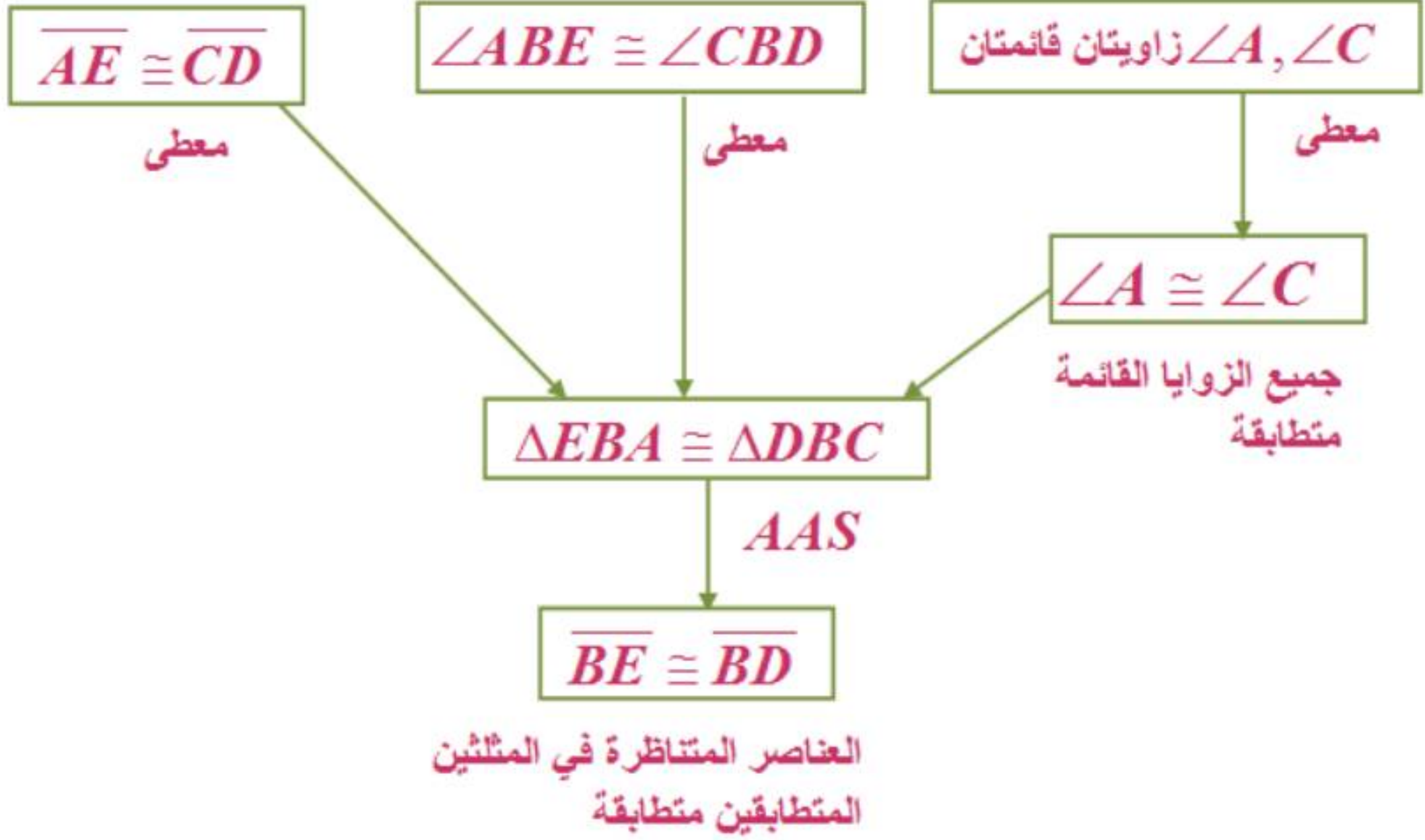
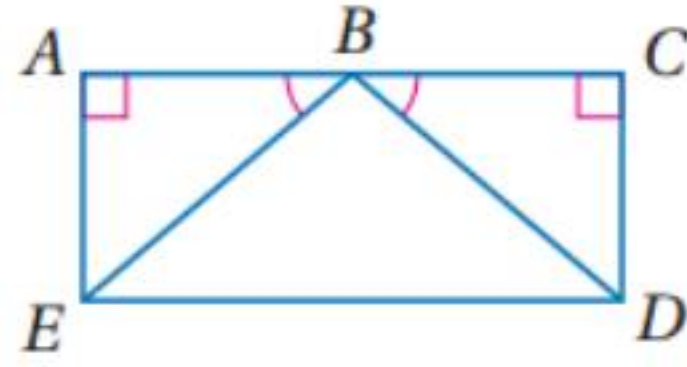
(2) $\overline{YV} \cong \overline{VW}$ (تعريف نقطة المنتصف)

(3) $\angle VWX \cong \angle VYU$ (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)

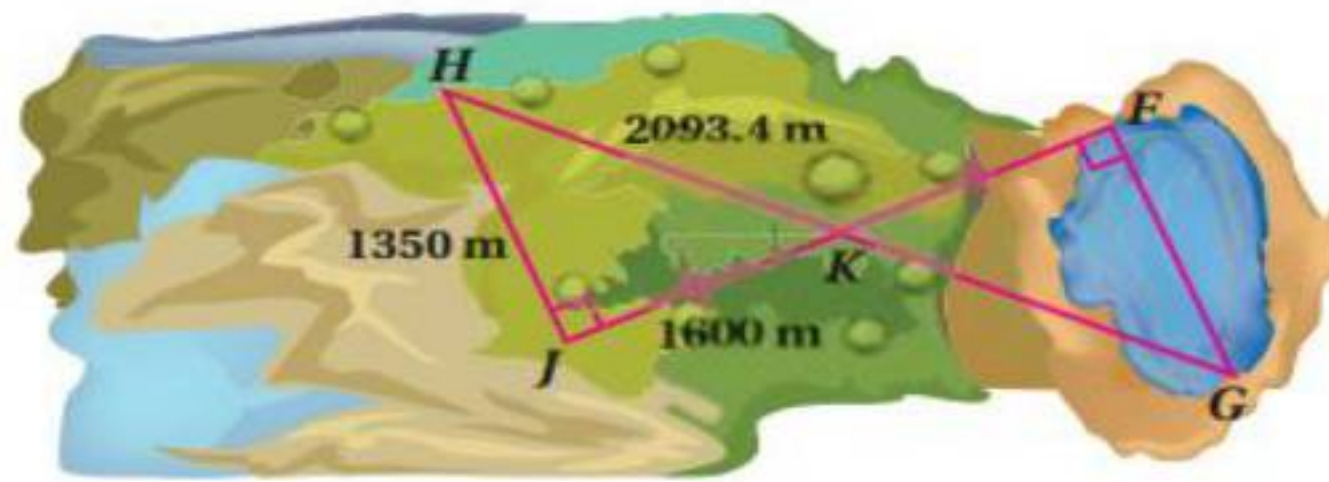
(4) $\angle VUY \cong \angle VXW$ (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)

(5) $\triangle UYV \cong \triangle XVW$ (حسب نظرية AAS)

(6) برهان: اكتب برهاناً تسلسلياً.



(7) سباق زوارق: المثال ٣



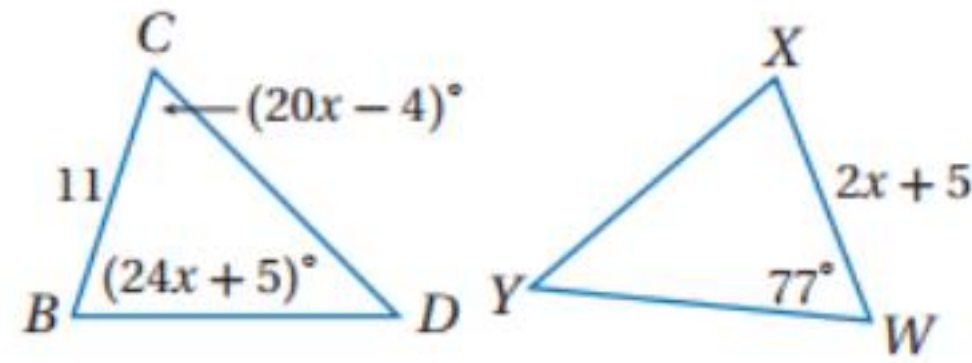
(a) $\angle HJK \cong \angle KFG$ لان جميع الزوايا القوائم متطابقة و $\overline{JK} = \overline{KF}$ و $\angle HKJ \cong \angle FKG$ متقابلتان بالرأس وبحسب ASA فإن $\triangle HKJ \cong \triangle GFK$ لذا فإن $\overline{FG} = \overline{HJ}$ لان العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، ولذلك يمكن قياس $\overline{HJ}$ لتقدير المسافة $\overline{FG}$ عبر البحيرة.

(b)

بما أن $\overline{FG} = \overline{HJ}$ إذن $\overline{FG} = 1350$ أي طول البحيرة = 1350 وهذه المسافة غير مطابقة للمسافة المطلوبة، إذن طول البحيرة غير كاف لإجراء السباق.

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

8)



$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle WXY$$

$$\therefore BC = WX$$

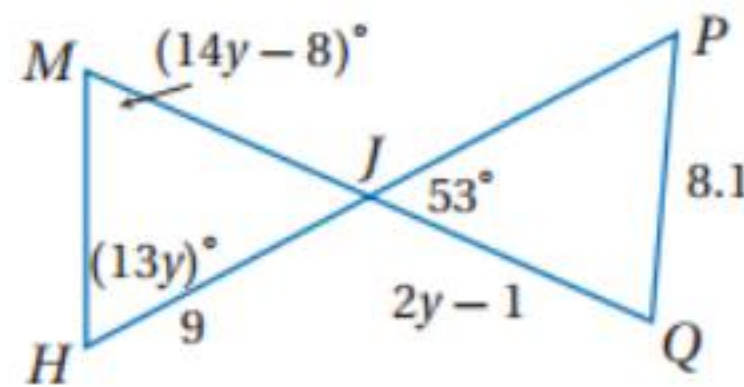
$$11 = 2x + 5$$

$$2x = 11 - 5$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

9)



$$\therefore \triangle MHJ \cong \triangle PQJ$$

$$\therefore HJ = QJ$$

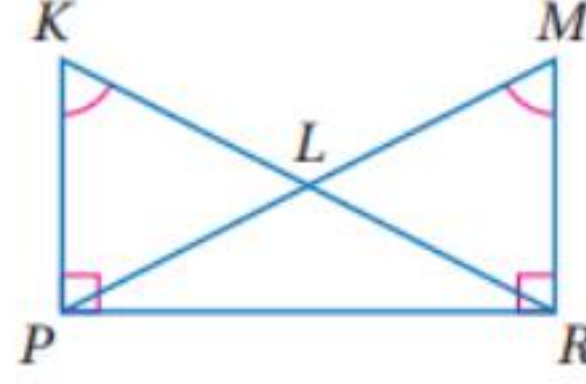
$$9 = 2y - 1$$

$$2y = 9 + 1$$

$$y = 5$$

برهان: اكتب برهاننا ذا عمودين

(10)



(1) $\angle K \cong \angle M$, $\overline{KP} \perp \overline{PR}$, $\overline{MR} \perp \overline{PR}$ (معطيات)

(2) $\angle KPR$, $\angle MRP$ قائمتان (تعريف التعامد)

(3) $\angle KPR \cong \angle MRP$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

(4) $\overline{PR} \cong \overline{PR}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

(5) $\triangle KPR \cong \triangle MRP$ (AAS)

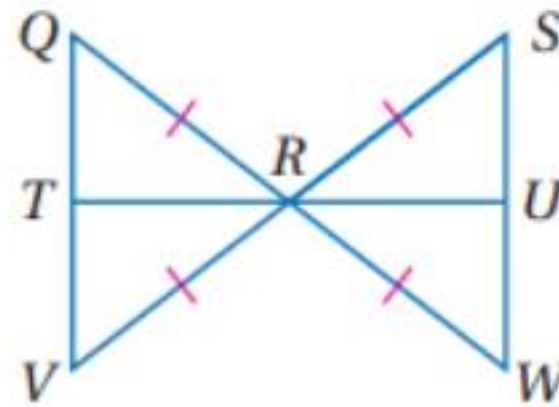
(6) $\overline{KP} \cong \overline{MR}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(7) $\angle KLP \cong \angle MLR$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

(8) $\triangle KLP \cong \triangle MLR$ (AAS)

(9) $\angle KPL \cong \angle MRL$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(11)



(1) $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$ (معطيات)

(2) $\angle QRV \cong \angle SRW$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

$$(SAS) \triangle VRQ \cong \triangle SRW \quad (3)$$

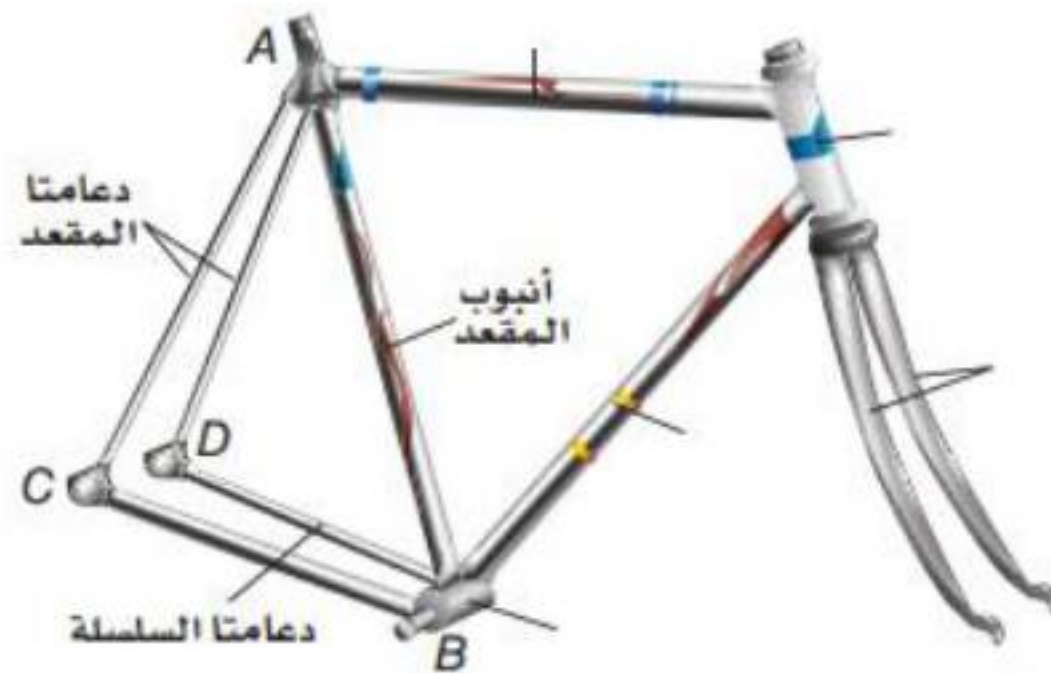
$$\angle VQR \cong \angle SWR \quad (4) \text{ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)}$$

$$\angle QRT \cong \angle URW \quad (5) \text{ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)}$$

$$(ASA) \triangle URW \cong \triangle TRQ \quad (6)$$

$$\overline{QT} \cong \overline{WU} \quad (7) \text{ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)}$$

(12) دراجات هوائية:



$$m \angle ACB = 68^\circ, m \angle ADB = 68^\circ, m \angle CBA = 44^\circ, m \angle DBA = 44^\circ \quad (1) \text{ (معطيات)}$$

$$m \angle ACB = m \angle ADB, m \angle CBA = m \angle DBA \quad (2) \text{ (بالتعويض)}$$

$$m \angle ACB \cong m \angle ADB, m \angle CBA \cong m \angle DBA \quad (3) \text{ (تعريف تطابق الزوايا)}$$

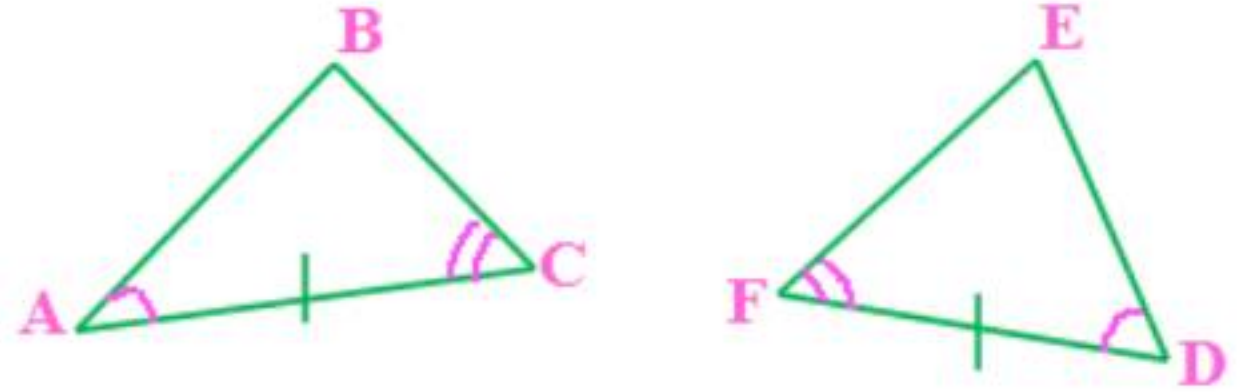
$$\overline{AB} \cong \overline{AB} \quad (4) \text{ (خاصية الانعكاس للتطابق)}$$

$$(AAS) \triangle ADB \cong \triangle ACB \quad (5)$$

$$\overline{AC} \cong \overline{AD} \quad (6) \text{ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة)}$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(13) مسألة مفتوحة:



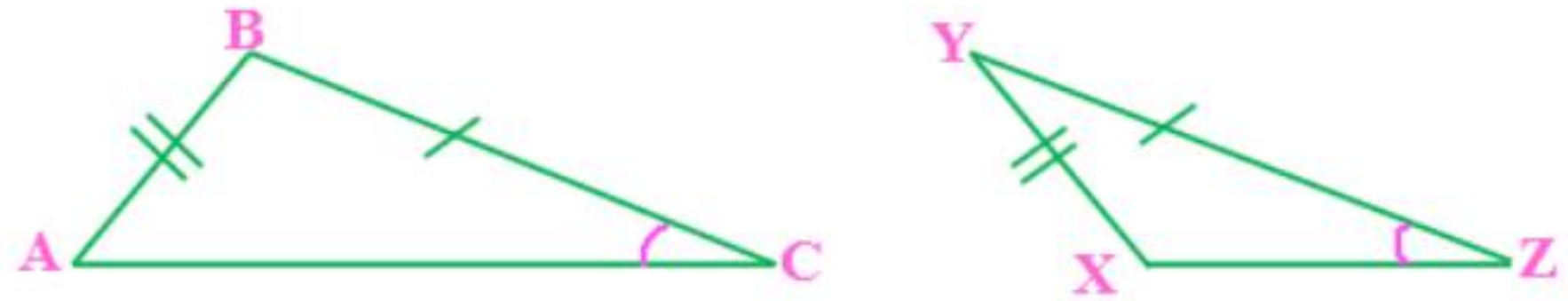
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ حسب مسألة ASA

(14) اكتشف الخطأ:

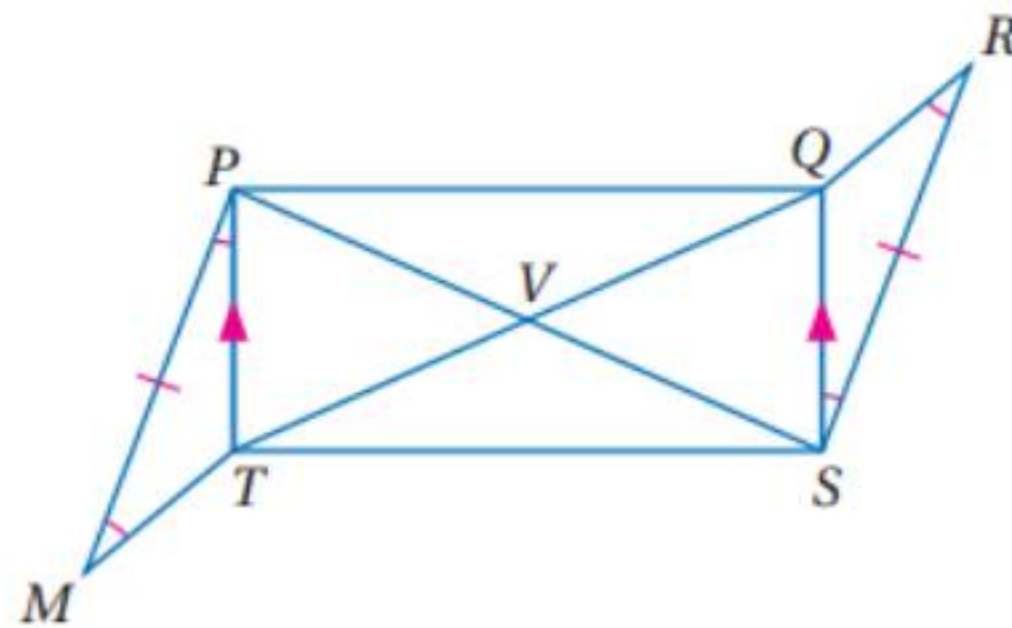
عمر إجابة صحيحة، لأن حسن حاول إثبات التطابق باستعمال AAA وهي ليست من الحالات التي تستعمل لإثبات التطابق

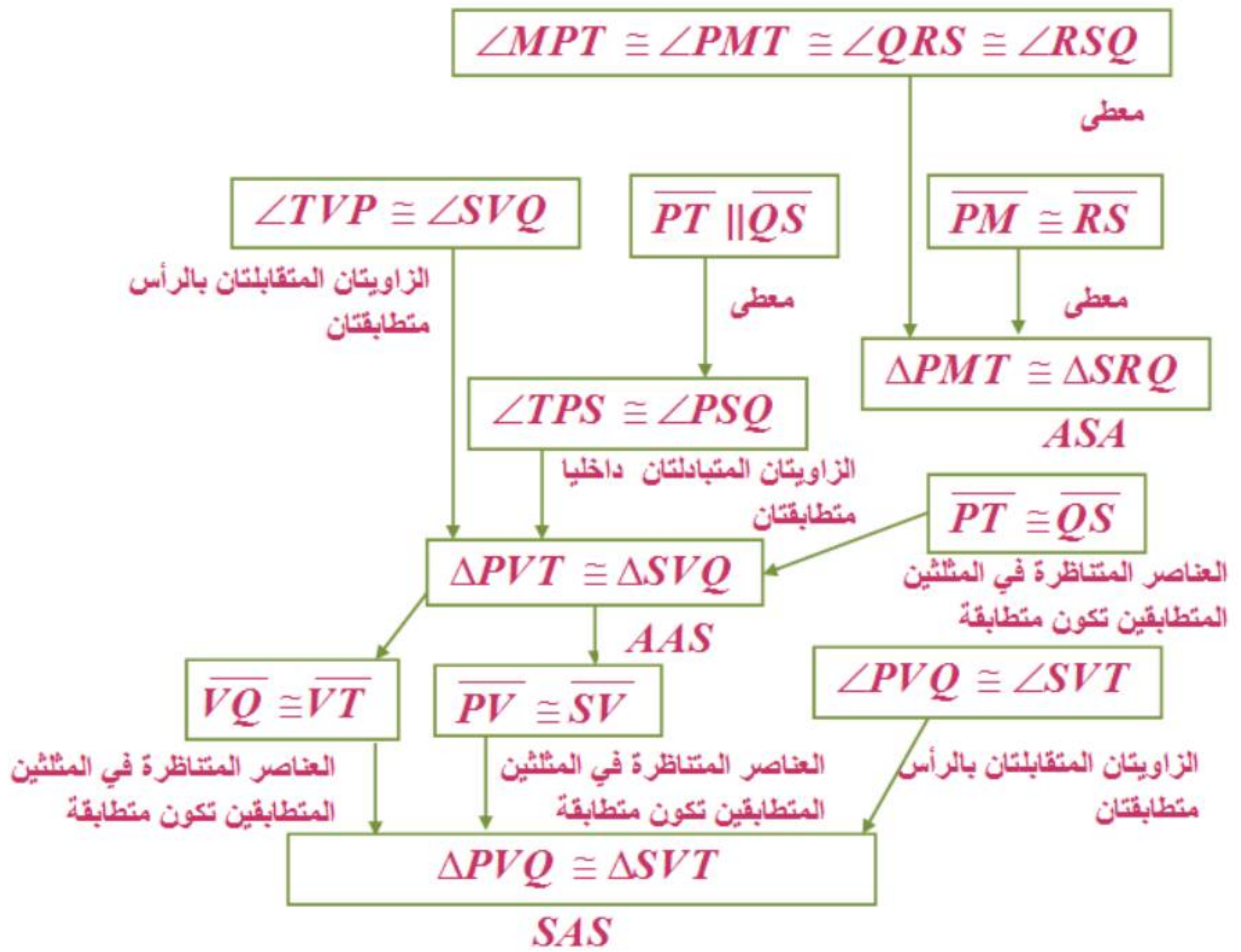
(15) تبرير:

في المثلثين أدناه. نلاحظ أن $AB \cong XY$ ، $\angle C \cong \angle Z$ ، $BC \cong YZ$ ،
لكن $\triangle ABC \not\cong \triangle XYZ$



(16) تحد:





(١٧) اكتب:

الطريقة	وقت استعمالها
تعريف المثلثين المتطابقين	عندما تكون جميع العناصر في أحد المثلثين متطابقة مع نظيراتها في المثلث الآخر
SSS	عندما تكون الأضلاع الثلاث في المثلث الأول متطابقة مع الأضلاع الثلاثة في المثلث الثاني
SAS	عندما يتطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الآخر.

ASA	عندما يتطابق زاويتان والضلع المحصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين والضلع المحصور بينهما في المثلث الآخر.
AAS	عندما تتطابق زاويتان وضلع غير محصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين وضلع غير محصور بينهما في المثلث الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري

(18) B

بما أن $\angle 1 \cong \angle 2$ (معطى) و $\angle BCA \cong \angle BCD$ تعريف التعامد (زاوية قائمة) ويوجد ضلع محصور بينهم إذن المسلمة ASA هي المستخدمة لإثبات تطابق المثلثين

(19) A: 15

20)

$$A(6,4), B(1,-6)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (-6-4)^2}$$

$$\sqrt{25+100} = 5\sqrt{5}$$

$$B(1,-6), C(-9,5)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-9-1)^2 + (5-(-6))^2}$$

$$\sqrt{100+121} = \sqrt{221}$$

$$A(6,4), C(-9,5)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-9-6)^2 + (5-4)^2}$$

$$\sqrt{225+1} = \sqrt{226}$$

$$X(0,7), Y(5,-3)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-0)^2 + (-3-7)^2}$$

$$\sqrt{25+100} = \sqrt{125}$$

$$Y(5,-3), Z(15,8)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(15-5)^2 + (8-(-3))^2}$$

$$\sqrt{100+121} = \sqrt{221}$$

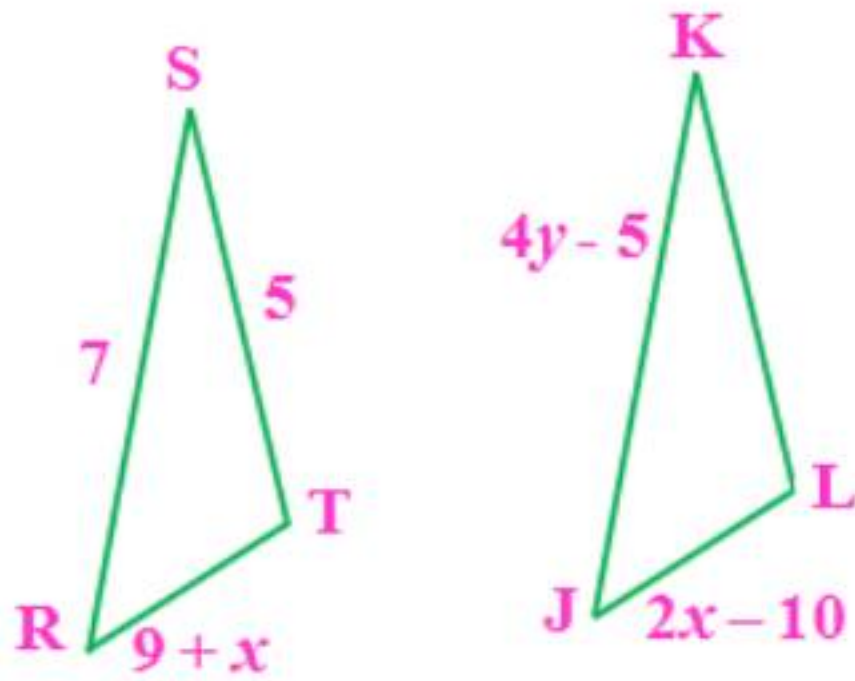
$$X(0,7), Z(15,8)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(15-0)^2 + (8-7)^2}$$

$$\sqrt{225+1} = \sqrt{226}$$

الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه ومتطابقة إذن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS

(21) جبر:



$$\triangle RST \cong \triangle JKL$$

$$\overline{JL} = \overline{RT}$$

$$2x - 10 = 9 + x$$

$$x = 19$$

$$\overline{JK} = \overline{SR}$$

$$4y - 5 = 7$$

$$4y = 12$$

$$y = 3$$

22)

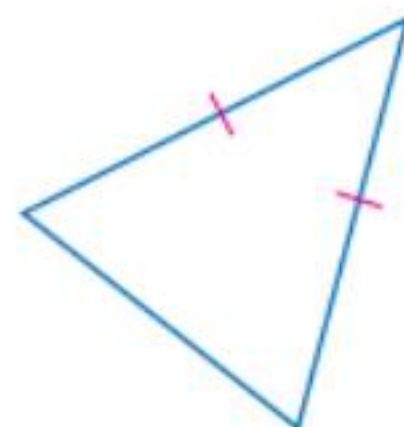
p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
F	T	T	T
T	T	F	T
F	F	T	T
T	F	F	F

استعد للدرس اللاحق

صنف كلا من المثلثين الآتيين وفقا لأضلاعه:

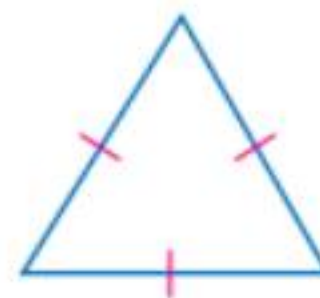
(23)

متطابق الضلعين



(24)

متطابق الأضلاع



حل:

(1)

(a) نعم يتطابق حسب مسلمة SAS

(b) نعم يتطابق حسب مسلمة AAS

(c) نعم يتطابق حسب مسلمة ASA

(2)

(a) LL

(b) HA

(c) LA

(3) خمن:

لا نحتاج إلى معلومات إضافية، فتطابق الضلعين في مثلث قائم الزاوية مع نظريهما في مثلث آخر قائم الزاوية كاف لإثبات التطابق

(4) نعم

(5) نعم

(6) يمكن إثبات تطابق مثلثين قائمين باستعمال SSA



حدد ما إذا كان كل زوج من المثلثات الآتية متطابقات أم لا. وإذا كانت الإجابة (نعم) فاذكر المسلمة أو النظرية التي استعملتها:

(7)



نعم متطابقين بحسب LA ضلع وزاوية حادة.

(8)



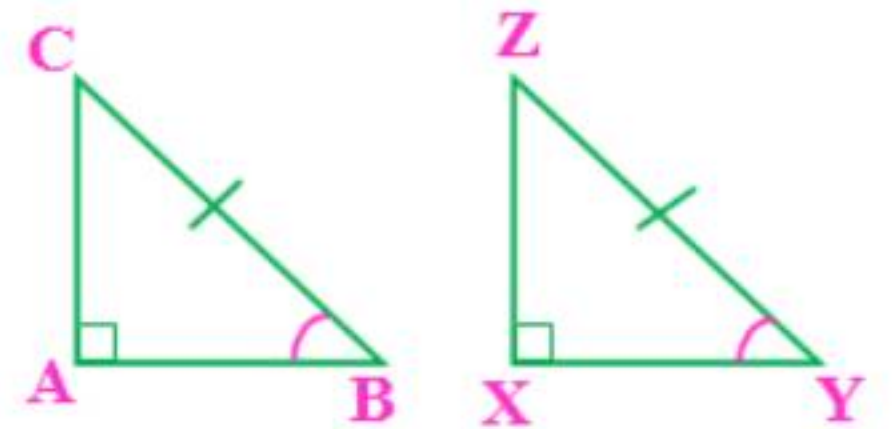
لا يمكن تطابق المثلثين.

(9)



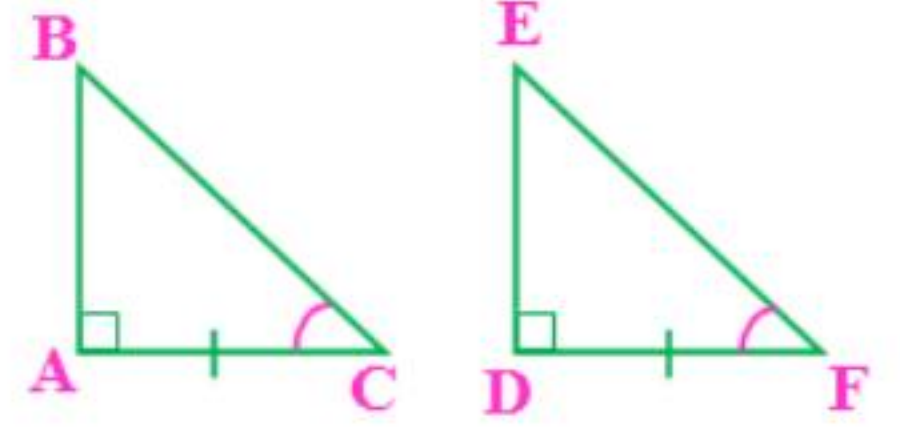
نعم متطابقين بحسب HL ضلع وزاوية حادة.

(10) النظرية ٣, ٧ :



البرهان: نعلم أن $\triangle ABC, \triangle XYZ$ قائما الزاوية. وأن $\angle A, \angle X$ قائمتان، وأن $\angle B \cong \angle Y, \overline{BC} \cong \overline{YZ}$. وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة. فإن $\angle A \cong \angle X$. ولذلك فإن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ بحسب AAS .

(١١) النظرية ٨، ٣:



الحالة 1: $\triangle ABC, \triangle DEF$ قائما الزاوية

$$\angle A = \angle D, AC = DF, \angle C = \angle F$$

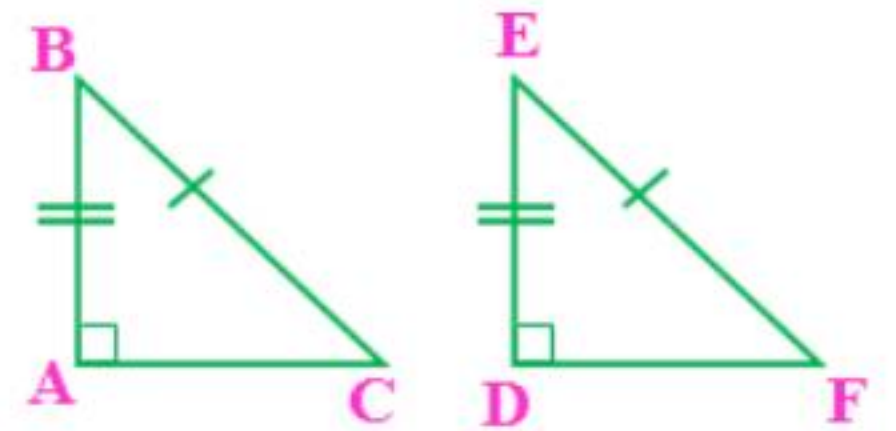
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ بحسب } ASA$$

الحالة 2: $\triangle ABC, \triangle DEF$ قائما الزاوية

$$\angle A = \angle E, CB = DF, \angle B = \angle F$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ بحسب } AAS$$

(12)



$\triangle ABC, \triangle DEF$ قائما الزاوية

$$\overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AB} \cong \overline{DE} \text{ معطى}$$

$$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF} \text{ (تعريف التطابق)}$$

$$(AB)^2 + (CA)^2 = (BC)^2 \text{ نظرية فيثاغورس}$$

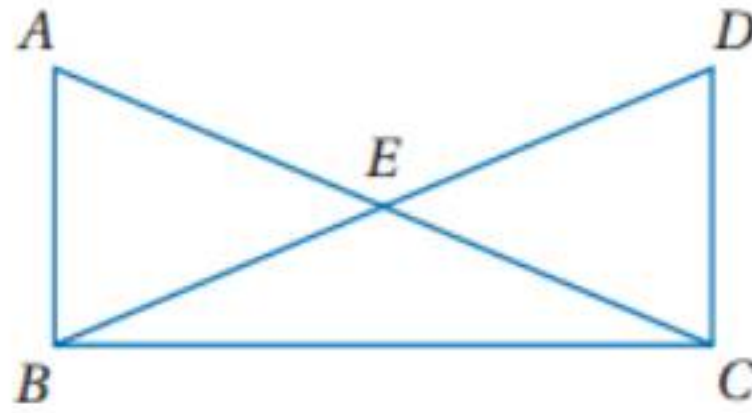
$$(DE)^2 + (FD)^2 = (EF)^2 \text{ نظرية فيثاغورس}$$

$$(AB)^2 + (CA)^2 = (DE)^2 + (FD)^2 \text{ خاصية التعويض}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ حسب SAS}$$

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 14:

(13)



$$(1) \overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC} \text{ (معطيات)}$$

$$(2) \angle ABC \text{ قائمة، } \angle DCB \text{ قائمة. (المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا قائمة)}$$

$$(3) \triangle ABC, \triangle DCB \text{ قائما الزاوية. (تعريف المثلث القائم الزاوية)}$$

$$(4) \overline{AC} \cong \overline{BD} \text{ (معطى)}$$

$$(5) \overline{BC} \cong \overline{BC}$$

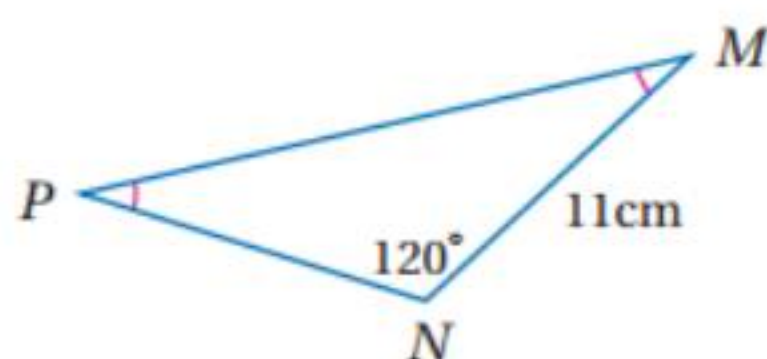
$$(6) \triangle ABC \cong \triangle DCB \text{ (HL)}$$

$$(7) \overline{AB} \cong \overline{DC} \text{ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)}$$



1A) $\angle FGJ, \angle FJG$

1B) GH, JH



2A)

$$\angle P + \angle M + \angle N = 180^\circ$$

$$\angle P = \angle M$$

$$\angle M + \angle M + 120^\circ = 180^\circ$$

$$2\angle M = 60^\circ$$

$$\angle M = 30^\circ$$

2B)

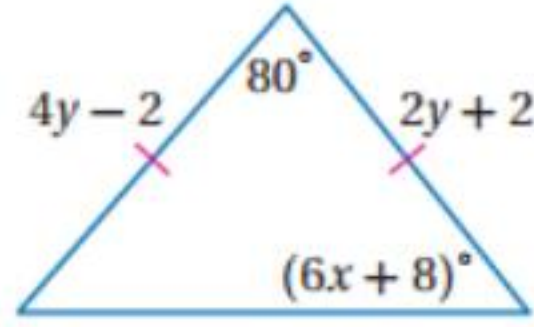
$$\therefore \angle M = \angle P$$

$$\therefore \overline{MN} = \overline{PN}$$

$$PN = 11CM$$

عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

(3) أوجد قيمة كل متغيرين في الشكل المجاور.



$$4y - 2 = 2y + 2$$

$$4y - 2y = 2 + 2$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

$$(6x + 8)^\circ = 4y - 2$$

$$6x + 8 = (180 - 80) \div 2$$

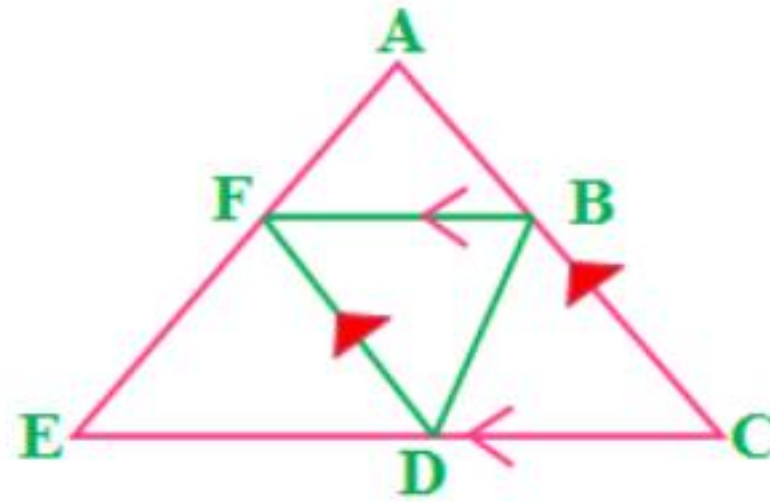
$$6x + 8 = 50$$

$$6x = 42$$

$$x = 7$$



(4)



(1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، D نقطة منتصف $\overline{EC}$ (معطيات)

(2) $m \angle A = 60^\circ, m \angle E = 60^\circ, m \angle C = 60^\circ$ (قياس كل زاوية في المثلث

المتطابق الأضلاع يساوي 60°)

$$(3) \quad m \angle E = m \angle C \text{ (خاصية التعدي للتطابق)}$$

$$(4) \quad \angle E \cong \angle C \text{ (تعريف التطابق)}$$

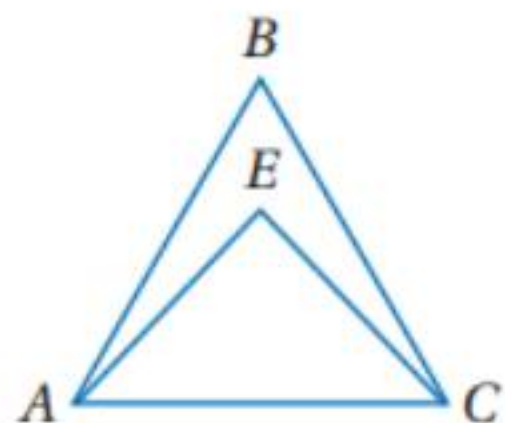
$$(5) \quad \overline{ED} \cong \overline{DC} \text{ (نظرية نقطة المنتصف)}$$

$$(6) \quad \angle CBD \cong \angle BDF, \angle EFD \cong \angle BDF \text{ (نظرية الزاويتي المتبادلتين داخلياً)}$$

$$(7) \quad \angle CBD \cong \angle EFD \text{ (خاصية التعدي للتطابق)}$$

$$(8) \quad \triangle FED \cong \triangle BDC \text{ (AAS)}$$

انظر إلى الشكل المجاور: المثال ١

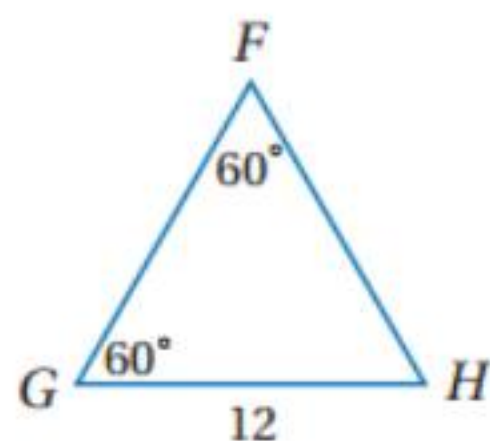


1) $\angle BAC, \angle BCA$

2) $\overline{EA}, \overline{EC}$

أوجد كلا من القياسين الآتيين: المثال ٢

3)

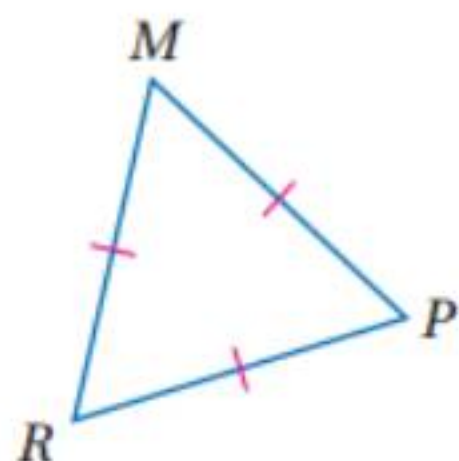


$$\therefore \angle F = \angle G$$

$$\therefore GH = FH$$

$$FH = 12$$

4)

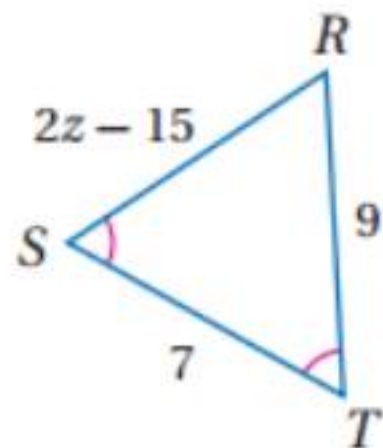


حسب نتيجة ٤, ٣ قياس كل زاوية 60° في المثلث المتطابق الأضلاع

$$\angle MRP = 60^\circ$$

جبر: أو جد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين: المثال ٣

5)



$$\therefore \angle S = \angle T$$

$$RT = RS$$

$$9 = 2z - 15$$

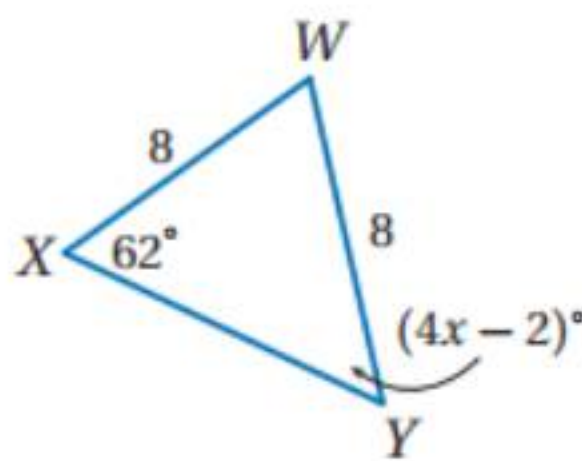
$$2z = 9 + 15$$

$$2z = 24$$

$$z = 12$$

(عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

6)



$$\therefore WY = WX$$

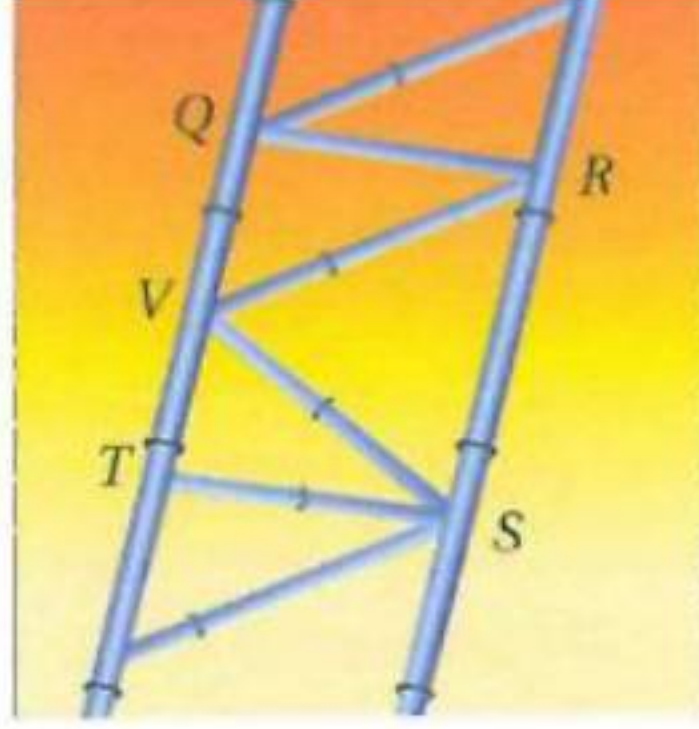
$$\angle WYX = \angle WXY$$

$$4x - 2 = 62$$

$$4x = 64$$

$$x = 16$$

(7) القاطرة السريعة: المثال ٤



(a) المعطيات: $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ عموديان على $\overline{QT}$ ،

المطلوب: $\Delta RQV \cong \Delta STV$

البرهان:

• $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ عموديان على $\overline{QT}$ ، و ΔVSR متطابق الضلعين و قاعدته $\overline{SR}$ و $\overline{QT} \square \overline{SR}$ (معطى)

• $\angle RQV$, $\angle STV$ زوايا قائمة

• $\angle RQV \cong \angle STV$ تعريف الزاوية القائمة

• $\overline{VR} \cong \overline{VS}$ تعريف المثلث المتطابق الضلعين

• $\angle VSR \cong \angle VRS$ تعريف المثلث المتطابق الضلعين

• $\angle QVR \cong \angle VRS$, $\angle TVS \cong \angle VRS$

• $\angle TVS \cong \angle QVR$

• $\angle RQV \cong \angle STV$ حسب مسلمة AAS

(b) من نظرية فيثاغورث $QV = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5m$

وحيث أن الاضلاع المتناظرة في المثلثين المتطابقين يكونوا متطابقين

$$VT = 1.5m \text{ إذن}$$

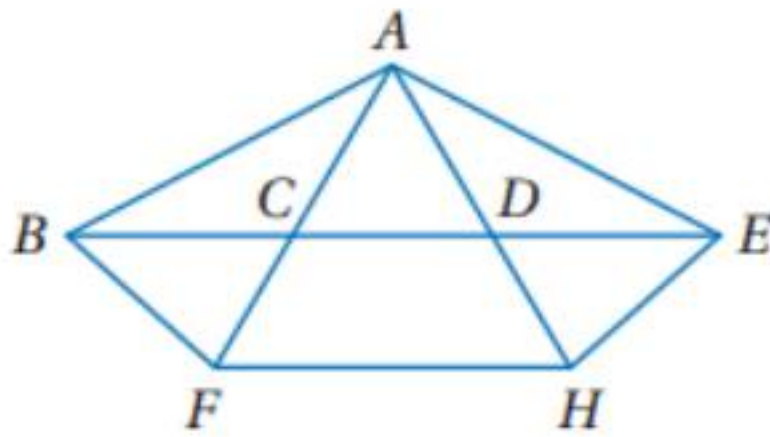
$$\therefore QV + VT = QT$$

$$1.5 + 1.5 = QT$$

$$QT = 3m$$

تدرب وحل المسائل

انظر إلى الشكل المجاور:



8)

$\angle ABE, \angle AEB$

9)

AB, AF

10)

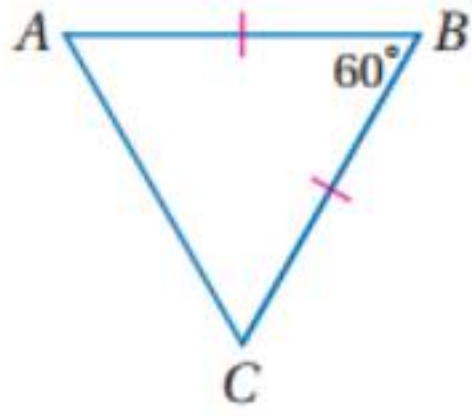
$\angle ACD, \angle ADC$

11)

AD, DE

أوجد كلا من القياسين الآتيين:

12)



$$\therefore AB = BC$$

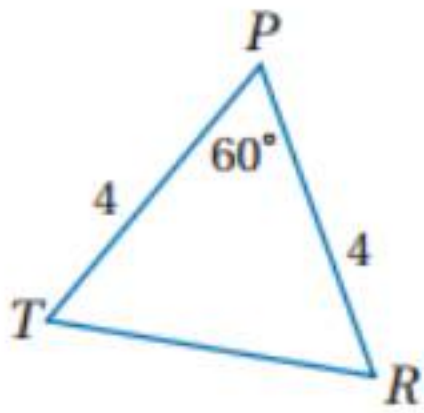
نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$$\therefore \angle A = \angle C$$

$$\angle A = \angle C = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$$

$$m \angle BAC = 60^\circ$$

13)



$$\therefore PR = PT$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

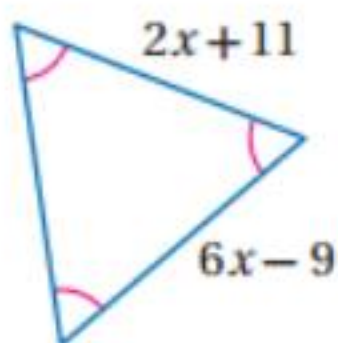
$$\therefore \angle R = \angle T$$

$$\therefore \angle R = \angle T = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$$

$$PR = PT = TR$$

$$TR = 4cm$$

14)



بما أن جميع زوايا المثلث متطابقة إذن الأضلع متطابقة حسب عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

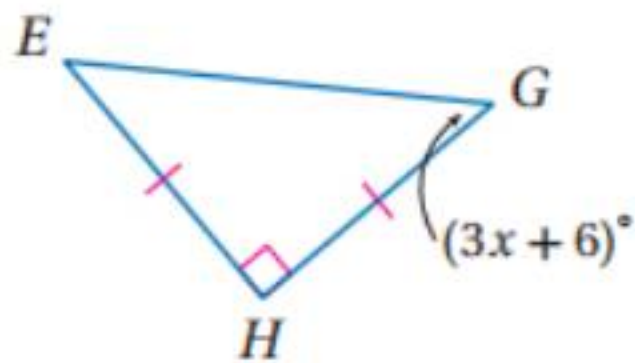
$$6x - 9 = 2x + 11$$

$$6x - 2x = 11 + 9$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

15)



$$\therefore HG = HE$$

$$\therefore \angle E = \angle G = 45^\circ$$

$$3x + 6 = 45$$

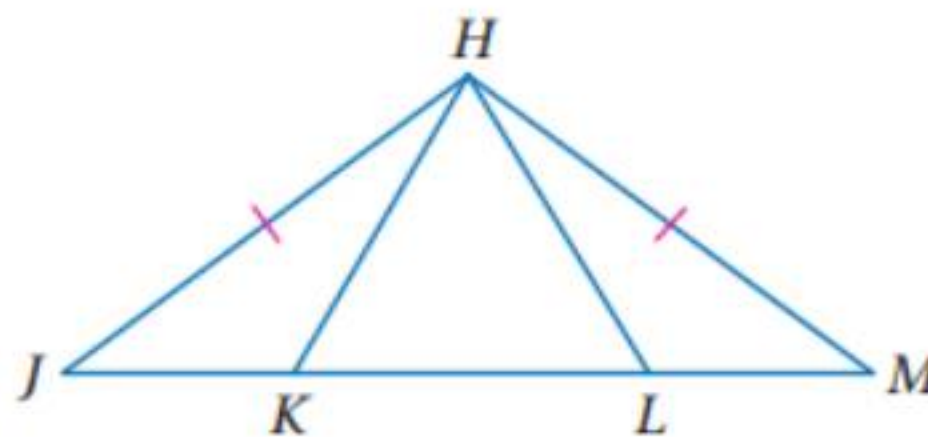
$$3x = 39$$

$$x = 13$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

برهان: اكتب برهاناً حراً. المثال ٤

(16)



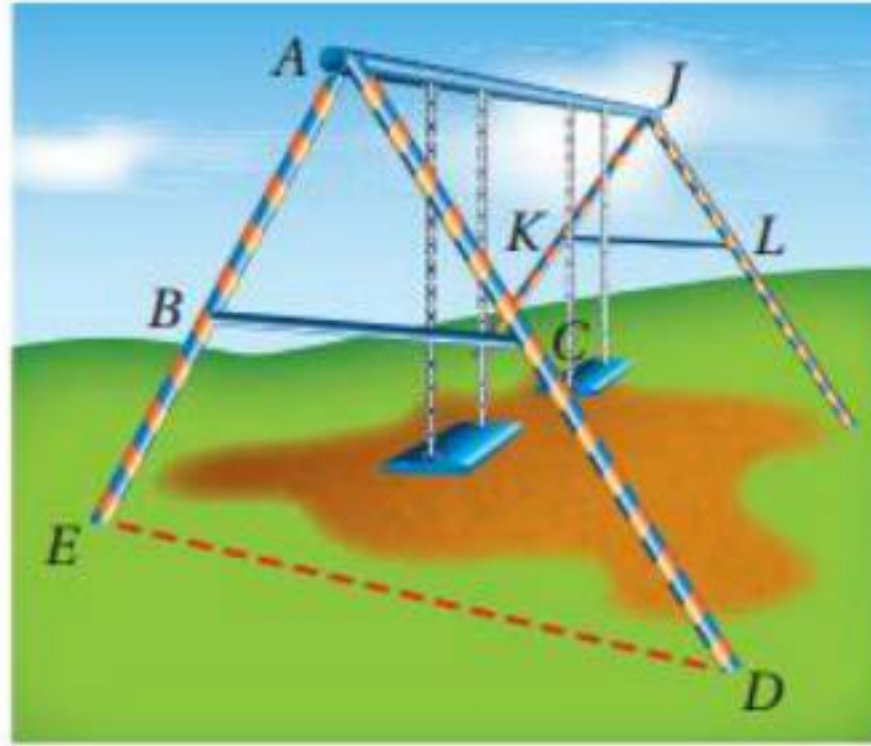
بما أن $HM = HJ$ إذن $\angle HMJ = \angle HJM$

وبما أن $\triangle HKL$ متطابق الأضلاع إذن $\angle HKJ = \angle HLM$ لأن $\angle HKL = \angle HLK$ من تطابق المثلث

إذن $\triangle HKJ \cong \triangle HLM$ حسب نظرية AAS .

ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن $\angle JHK = \angle MHL$

(17) حدائق:



(a)

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ إذن $\angle ABC = \angle ACB$

حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: $180^\circ - 50^\circ = \angle ABC + \angle ACB$

$130^\circ = \angle ABC + \angle ABC$ (خاصية التعويض)

$65^\circ = \angle ABC$

(b)

المبررات	العبارات
معطيات	$AB \cong AC, BE \cong CD$

تعريف تطابق القطع المستقيمة	$AB = AC , BE = CD$
مسلمة جمع القطع المستقيمة	$AB + BE = AE$
مسلمة جمع القطع المستقيمة	$AC + CD = AD$
خاصية الجمع للمساواة	$AB + BE = AC + CD$
تعريف تطابق القطع المستقيمة	$AE = AD$
تعريف المثلث المتطابق الضلعين	مثلث AED متطابق الضلعين

(c)

$$(1) \overline{AB} \cong \overline{AC} , \overline{BC} \square \overline{ED} , \overline{ED} \cong \overline{AD} \text{ (معطيات)}$$

$$(2) \angle ABC \cong \angle ACB \text{ (نظرية المثلث متطابق الضلعين)}$$

$$(3) \angle ABC = \angle ACB \text{ (تعريف تطابق الزوايا)}$$

$$(4) \angle ABC \cong \angle AED , \angle ACB \cong \angle ADE \text{ (زوايا متناظرة)}$$

$$(5) \angle ABC = \angle AED , \angle ACB = \angle ADE \text{ (تعريف تطابق الزوايا)}$$

$$(6) m \angle AED = m \angle ACB \text{ (بالتعويض)}$$

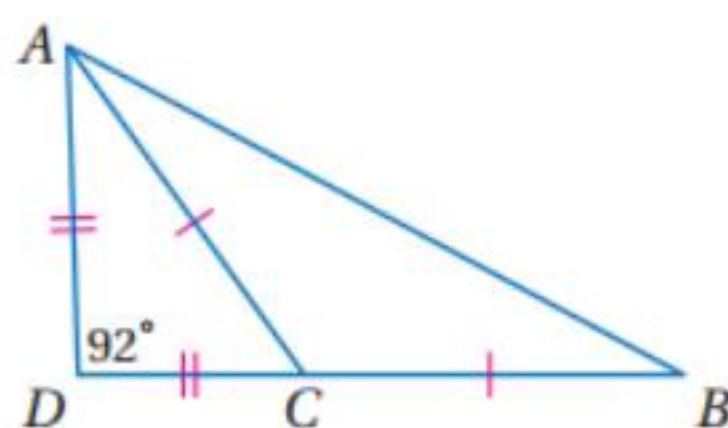
$$(7) m \angle AED = m \angle ADE \text{ (بالتعويض)}$$

$$(8) \angle AED \cong \angle ADE \text{ (تعريف تطابق الزوايا)}$$

$$(9) \overline{AD} \cong \overline{AE} \text{ (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)}$$

$$(10) \triangle AED \text{ متطابق الأضلاع (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)}$$

أوجد كلا من القياسات الآتية:



18)

$$\therefore DA = DC$$

$$\angle CAD = \angle ACD$$

$$2\angle CAD = 180^\circ - 92^\circ$$

$$\angle CAD = 44^\circ$$

19)

$$\therefore DA = DC$$

$$\angle CAD = \angle ACD$$

$$2\angle ACD = 180^\circ - 92^\circ$$

$$\angle ACD = 44^\circ$$

20)

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 44^\circ$$

$$\angle ACB = 136^\circ$$

21)

$$\therefore AC = CB$$

$$\angle CAB = \angle ABC$$

$$2\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB$$

$$2\angle ABC = 180^\circ - 136^\circ$$

$$\angle ABC = 22^\circ$$

برهان: اكتب برهاننا ذا عمودي لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

(22) الحالة الأولى:

(1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع (معطى)

(2) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

(3) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (تعريف المثلث المتطابق الضلعين)

(4) $\triangle ABC$ متطابق الزوايا (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

الحالة الثانية:

(1) $\triangle ABC$ متطابق الزوايا (معطى)

(2) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

(3) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما يكونان متطابقين)

(4) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

(23)

(1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع (معطى)

$$(2) \overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC} \text{ (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)}$$

$$(3) \angle A \cong \angle B \cong \angle C \text{ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)}$$

$$(4) m \angle A = m \angle B = m \angle C \text{ (تعريف التطابق)}$$

$$(5) m \angle A + m \angle B + m \angle C = 180^\circ \text{ (نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)}$$

$$(6) m \angle A = 60^\circ \text{ (خاصية القسمة)}$$

$$(7) m \angle A = m \angle B = m \angle C = 60^\circ \text{ (بالتعويض)}$$

(24)

$$(1) \text{ افترض أن } \overrightarrow{BD} \text{ ينصف } \angle ABC \text{ (مسلمة المنقولة)}$$

$$(2) \angle ABD \cong \angle CBD \text{ (تعريف منصف الزاوية)}$$

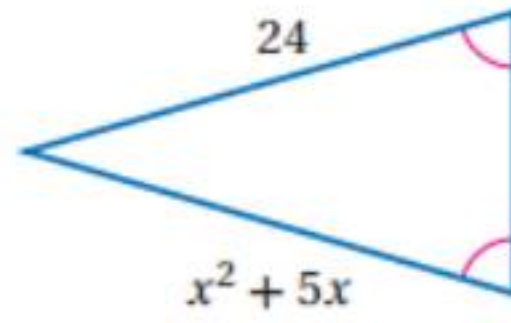
$$(3) \angle A \cong \angle C \text{ (معطى)}$$

$$(4) \overline{BD} \cong \overline{BD} \text{ (خاصية الانعكاس)}$$

$$(5) \triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ (AAS)}$$

$$(6) \overline{AB} \cong \overline{CB} \text{ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)}$$

أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:



25)

$$x^2 + 5x = 24$$

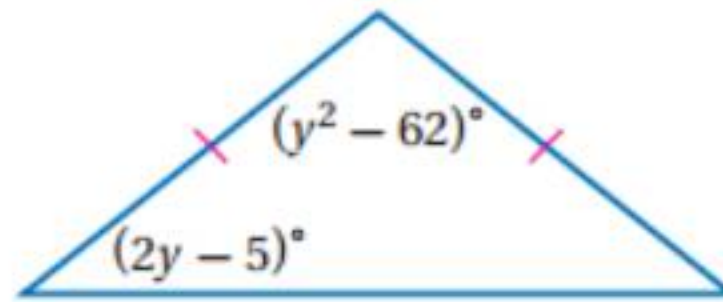
$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -8 \text{ ✗}$$

عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين



26)

$$(y^2 - 62) + 2(2y - 5) = 180^\circ$$

$$y^2 - 62 + 4y - 10 = 180^\circ$$

$$y^2 + 4y - 62 - 190^\circ = 0$$

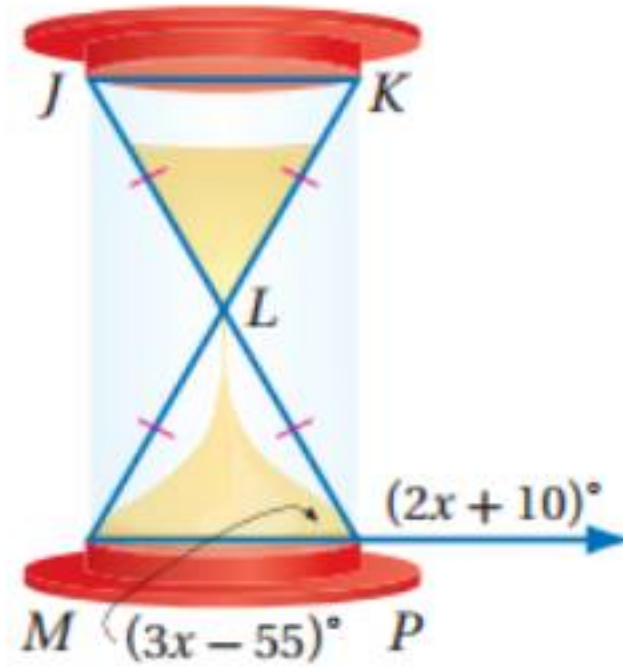
$$y^2 + 4y - 252^\circ = 0$$

$$(y + 18)(y - 14) = 0$$

$$y = 14$$

$$y = -18 \text{ ✗}$$

الساعة الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كل من القياسات الآتية:



27)

$$(2x + 10) + (3x - 55) = 180^\circ$$

$$5x - 45 = 180$$

$$5x = 180 + 45$$

$$x = 45$$

$$\angle LPM = (3x - 55) = 3 \times 45 - 55$$

$$\angle LPM = 80^\circ$$

زاويتان متجاورتان على مستقيم

28)

$$\therefore LP = LM$$

$$\angle LPM = \angle LMP = 80^\circ$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

29)

$$\angle MLP = 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ)$$

$$\angle MLP = 20^\circ$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle MLP = \angle JLK = 20^\circ$$

زاويتان متقابلتان بالرأس

30)

$$\angle JKL + \angle KJL = 180^\circ - 20^\circ$$

$$\angle JKL + \angle KJL = 160^\circ$$

$$\therefore LK = JL$$

$$\therefore \angle JKL = \angle KJL$$

$$2\angle JKL = 160^\circ$$

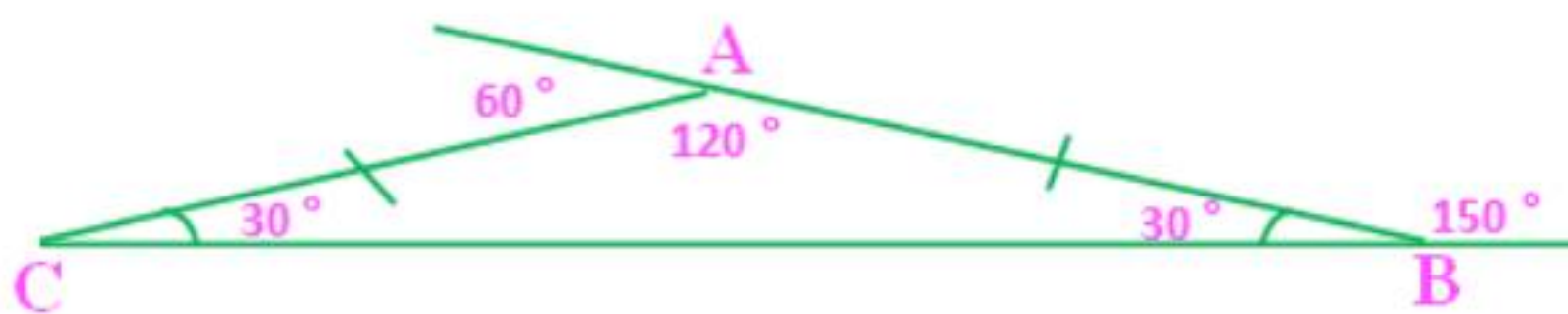
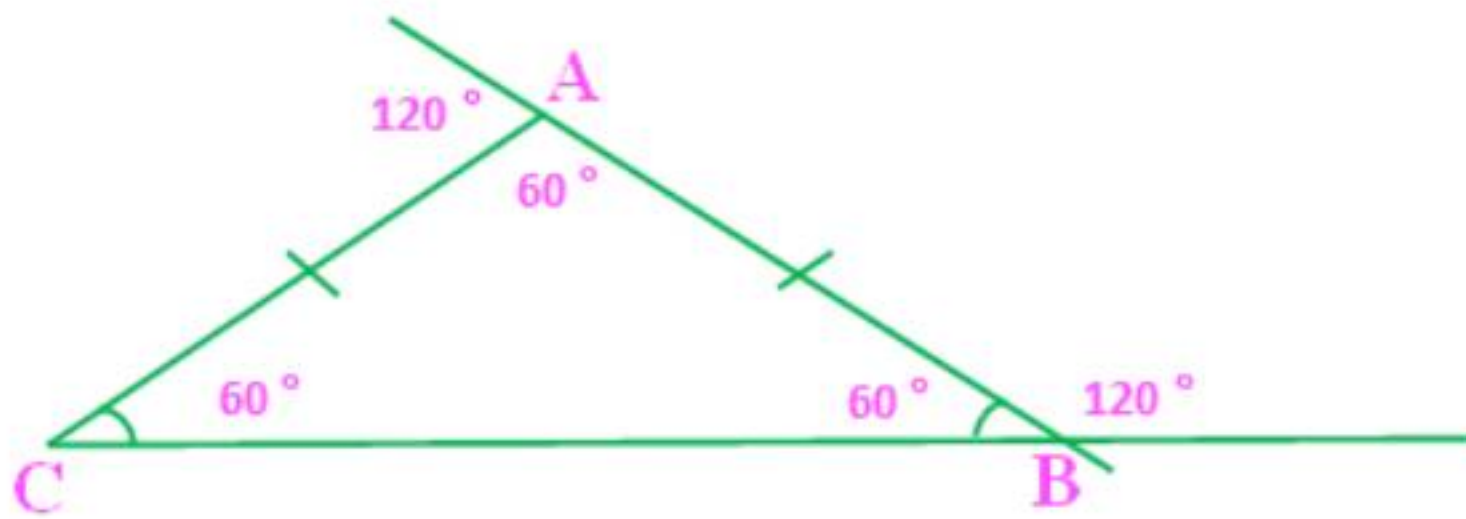
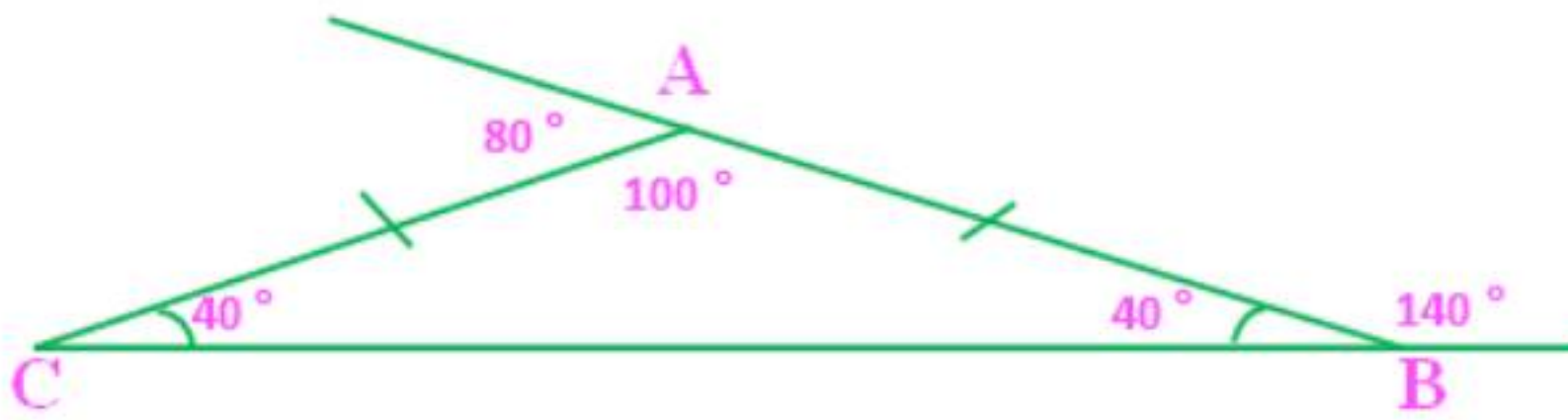
$$\angle JKL = 80^\circ$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

(31) تمثيلات متعددة:

(a) هندسيا:



(b) جدوليا:

$m \angle 5$	$m \angle 4$	$m \angle 3$	$m \angle 1$
٤٠	٤٠	١٠٠	١٤٠
٦٠	٦٠	٦٠	١٢٠
٣٠	٣٠	١٢٠	١٥٠

$m \angle 5$	$m \angle 4$	$m \angle 3$	$m \angle 2$
٤٠	٤٠	١٠٠	٨٠
٦٠	٦٠	٦٠	١٢٠
٣٠	٣٠	١٢٠	٦٠

(c) لفظيا:

$$m \angle 5 = 180 - m \angle 1$$

زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$m \angle 4 = m \angle 5$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$$m \angle 3 = 180 - (m \angle 4 + m \angle 5)$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

(d) جبريا:

$$m \angle 5 = 180 - x$$

$$m \angle 4 = 180 - x$$

$$m \angle 3 = 180 - 2(180 - x) = 2x - 180$$

(32) تحد:

نعلم أن $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، وبما أن المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا، فإن $\angle ZWJ \cong \angle WJZ \cong \angle JZW$ وبحسب تعريف تطابق الزوايا

$$m \angle ZWJ = m \angle WJZ = m \angle JZW$$

وبما أن $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ فإن:

$$m \angle ZWP = m \angle WJM = m \angle JZL$$

مسلمة جمع الزوايا ينتج أن:

$$m \angle ZWJ = m \angle ZWP + m \angle PWJ ,$$

$$m \angle WJZ = m \angle WJM + m \angle MJZ ,$$

$$m \angle JZW = m \angle JZL + m \angle LZW$$

وبالتعويض ينتج أن:

$$m \angle ZWP + m \angle PWJ = m \angle WJM + m \angle MJZ = m \angle JZL + m \angle LZW$$

وبالتعويض مرة أخرى ينتج أن:

$$m \angle ZWP + m \angle PWJ = m \angle ZWP + m \angle PJZ = m \angle ZWP + m \angle LZW$$

وبحسب خاصية الطرح للمساواة ينتج أن:

$$m \angle PWJ = m \angle PJZ = m \angle LZW$$

$$\angle PWJ \cong \angle PJZ \cong \angle LZW . \text{ وبحسب مسلمة } ASA \text{ ينتج أن}$$

$$\triangle WZL \cong \triangle ZJM \cong \triangle JWP . \text{ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين}$$

$$\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM} \text{ فإن تكون متطابقة،}$$

تبرير:

(33) أحيانا، تكون صحيحة فقط عندما يكون قياس زاوية الرأس عددا زوجيا.

(34) غير صحيحة أبدا، لان قياس زاوية الرأس يساوي (قياس إحدى زاويتي القاعدة) $(2 - 180)$ ، إذا كان قياس احدي زاويتي القاعدة عدد صحيح فان مجموع قياس زاويتي القاعدة يكون عددا زوجيا وبالتالي فان قياس زاوية الرأس سيكون زوجيا أيضا.

(35) مسألة مفتوحة:

لا يمكن أن يحوى المثلث أكثر من زاوية منفرجة، لذا لا يمكن رسم المثلث المطلوب.

(36) اكتب:

مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 وزاويتا القاعدة لهما نفس القياس، لذا فان قياس زاوية رأس المثلث يساوي 180 ناقصا مثلي قياس إحدى زاويتي القاعدة

تدريب على الاختبار المعيارى

37) A : $\angle A \cong \angle BCA$

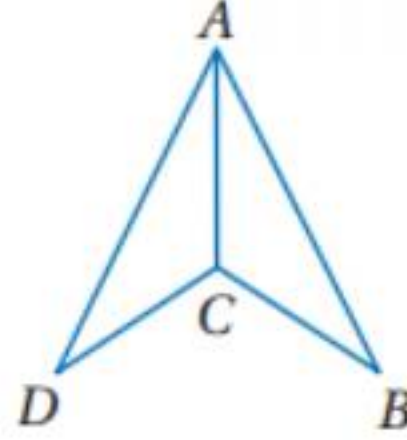
38) D

$x = -3$

$4 \times (-3)^2 - 7 \times (-3) + 5$

$36 + 21 + 5 = 62$

39)



$$\therefore AB = AD = 27in$$

(معطى)

$$\therefore CB = DC = 7in$$

$$\therefore AC = AC \quad \text{حسب خاصية الانعكاس}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABC \quad \text{حسب SSS}$$

اذكر الخاصية التي تبرر كلا من العبارات الآتية:

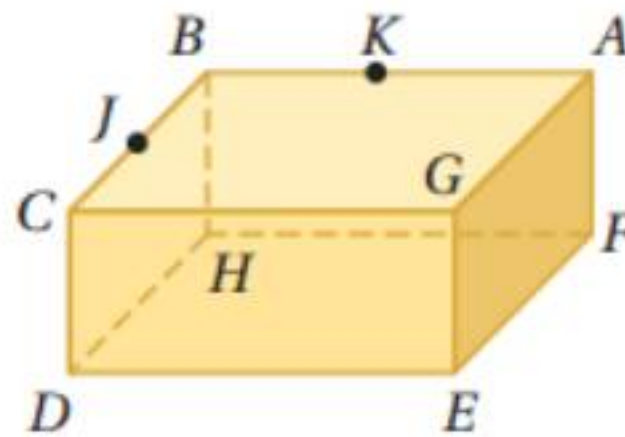
(40) خاصية التوزيع

(41) خاصية الجمع للمساواة

(42) خاصية التعويض

(43) خاصية التعدي

انظر إلى الشكل المجاور:



(44) 6 مستويات.

(45) A, K, B

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفيها كما يأتي:

46) $A(2,15), B(7,9)$

$$\left(\frac{2+7}{2}\right), \left(\frac{9+15}{2}\right)$$

(4.5,12)

47) $C(-4,6), D(2,-12)$

$$\left(\frac{-4+2}{2}\right), \left(\frac{6-12}{2}\right)$$

(-1,-3)

48) $E(3,2.5), F(7.5,4)$

$$\left(\frac{7.5+3}{2}\right), \left(\frac{2.5+4}{2}\right)$$

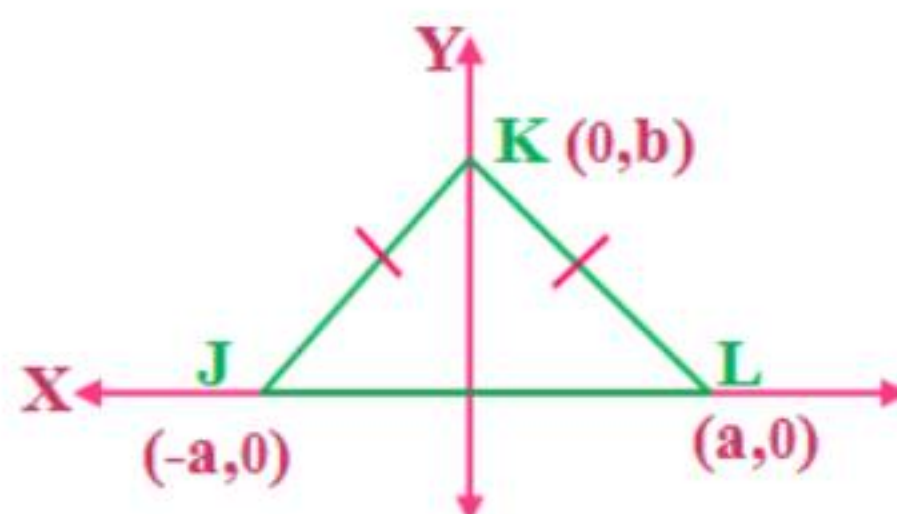
(5.25,3.25)

المثلثات والبرهان الإحداثي

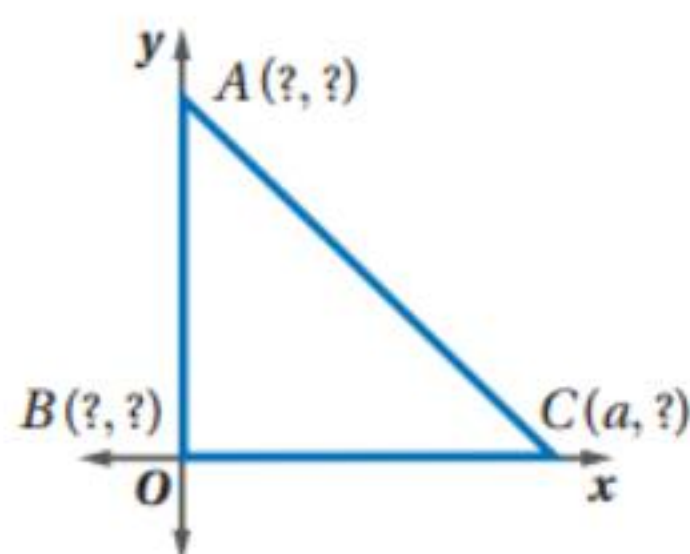
3-7



(1)



(٢)



بما أن الرأس B يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0, 0)$

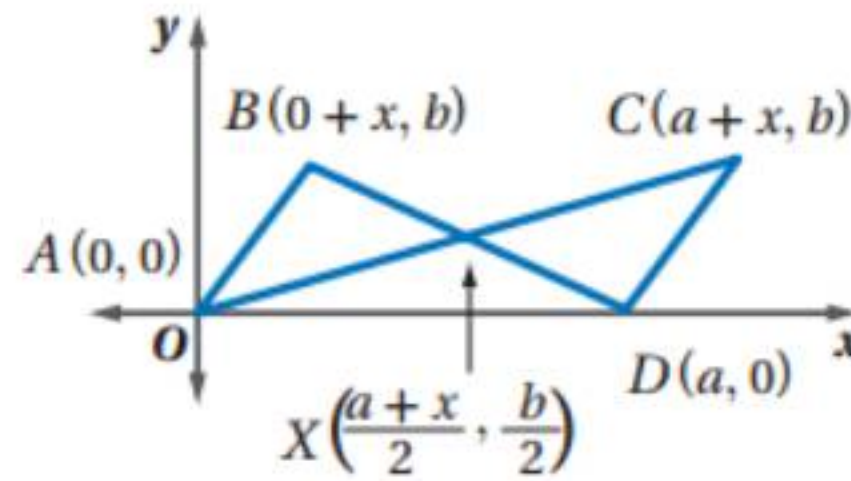
وبما أن الرأس C يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وتكون الرأس $C: (a, 0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين والرأس A يقع على المحور Y فإن الإحداثي $X = 0$

وتكون الرأس $A: (0, a)$



(3)



نقطة منتصف $\overline{AC}$ هي

$$\left(\frac{0+a+x}{2}, \frac{0+b}{2} \right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

نقطة منتصف $\overline{BD}$ هي $\left(\frac{0+x+a}{2}, \frac{b+0}{2} \right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2} \right)$

$\overline{AC}$ ينصف $\overline{BD}$ و $\overline{BD}$ ينصف $\overline{AC}$ وذلك بتعريف المنصف.

$\overline{AX} \cong \overline{XC}$ و $\overline{BX} \cong \overline{XD}$ وذلك بتعريف المنصف.

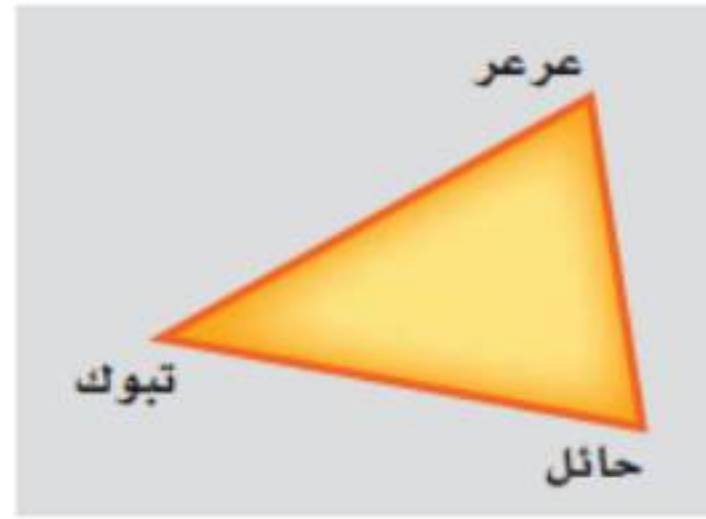
$$CD = \sqrt{((a+x)-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

$$AB = \sqrt{((0+x)-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

إذن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ بتعريف تطابق القطع المستقيمة.

$\triangle ABX \cong \triangle CDX$ بحسب SSS

(4) جغرافيا:



افترض أن T ترمز لمدينة تبوك، A ترمز لمدينة عرعر، H لمدينة حائل

$$AT = \sqrt{(28.37 - 30.9)^2 + (36.6 - 41.13)^2} \approx 5.19$$

$$HT = \sqrt{(28.37 - 27.43)^2 + (36.6 - 41.68)^2} \approx 5.17$$

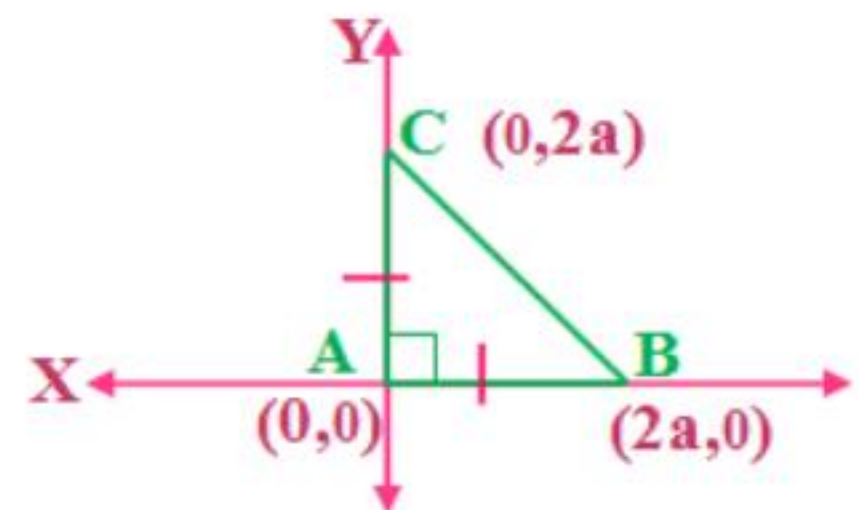
$$AH = \sqrt{(30.9 - 27.43)^2 + (41.13 - 41.68)^2} \approx 3.51$$

وبما أن $AT \cong HT$ ، فإن $\triangle ATH$ متطابق الضلعين تقريباً.

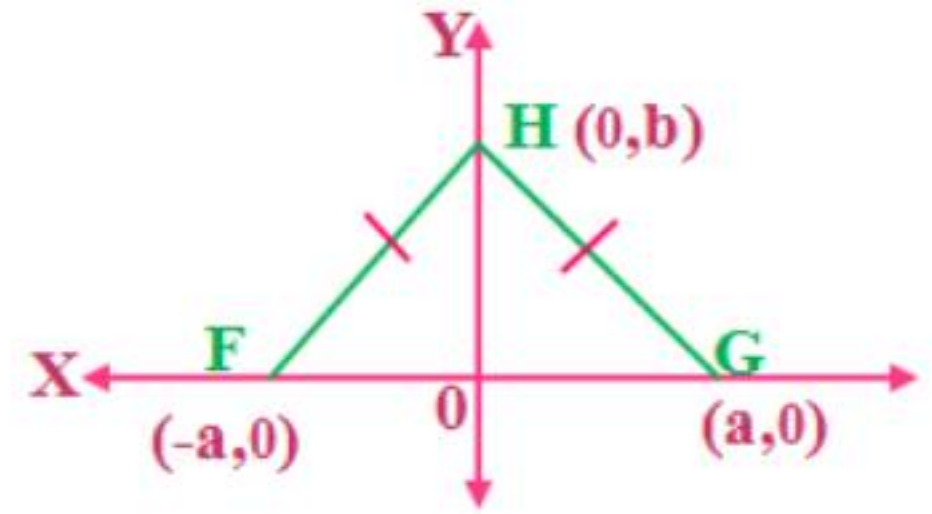


ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوي الاحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه: المثال ١

(1)

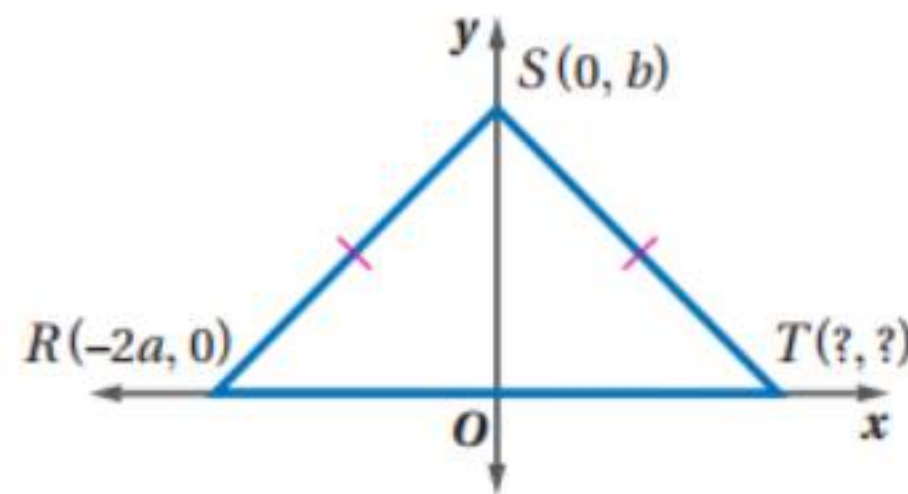


(2)



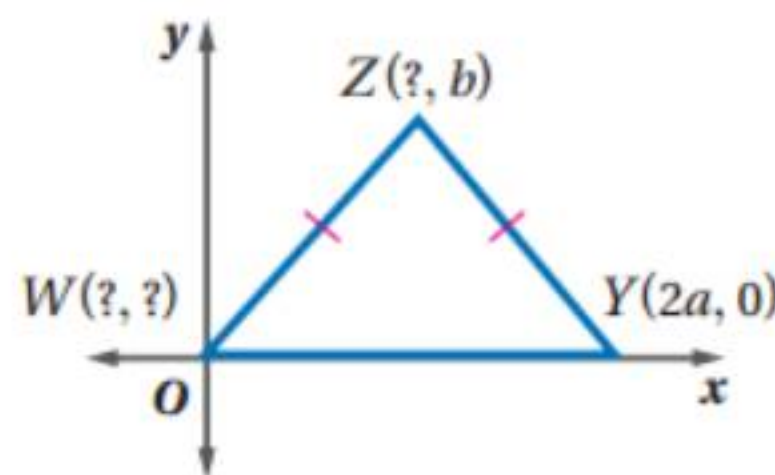
أوجد الإحداثيات المجهولة في كل من المثلثين الآتيين: المثال ٢

(3)



وبما أن الرأس T يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن النقطة T تقع عند النقطة $(2a, 0)$

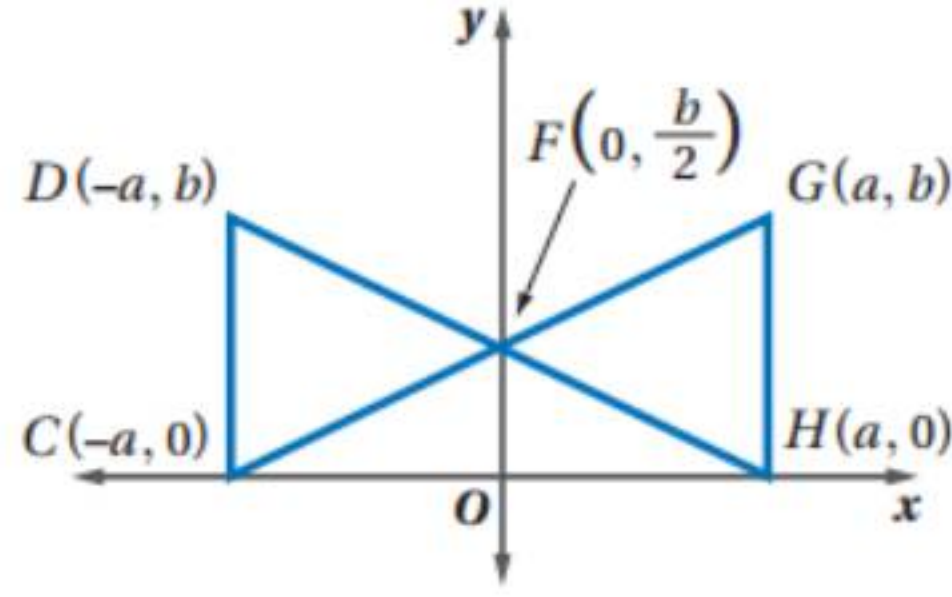
(4)



بما أن الرأس W يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0, 0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس Z يقع في منتصف المسافة بين $0, 2a$ ويكون a إذن الإحداثي الرأسي Z : (a, b)

(5) اكتب برهانا احداثياً لإثبات أن $\triangle FGH \cong \triangle FDC$. المثال ٣



$$DC = \sqrt{(-a - (-a))^2 + (b - 0)^2} = b$$

$$GH = \sqrt{(a - a)^2 + (b - 0)^2} = b$$

بما أن $DC = GH$ ، فإن $\overline{DC} \cong \overline{GH}$.

$$DF = \sqrt{(0 - a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

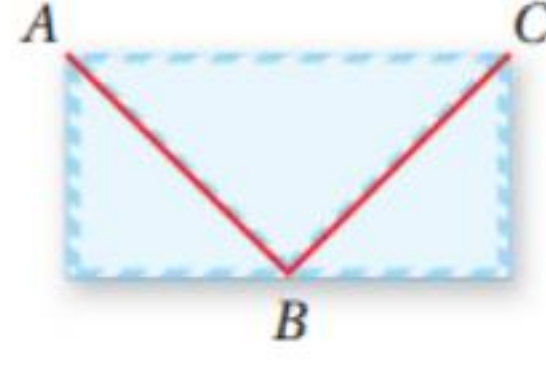
$$GF = \sqrt{(0 + a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$CF = \sqrt{(0 + a)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$HF = \sqrt{(a - 0)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$\triangle FGH \cong \triangle FDC$ بحسب SSS

(6) اكتب برهانا إحدائياً لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين: المثال ٤



استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتجد AB و BC

$$A(0,10), B(10,0), C(20,10)$$

$$AB = \sqrt{(0-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

$$BC = \sqrt{(20-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

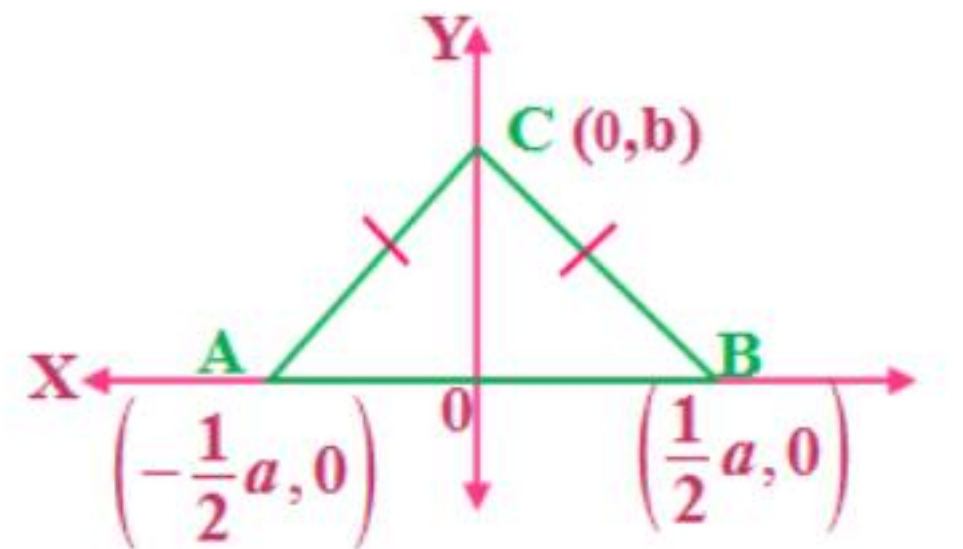
وبما أن $AB = BC$ ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ويكون الساقان متطابقتين، أي أن:

$\triangle ABC$ متطابق الضلعين.

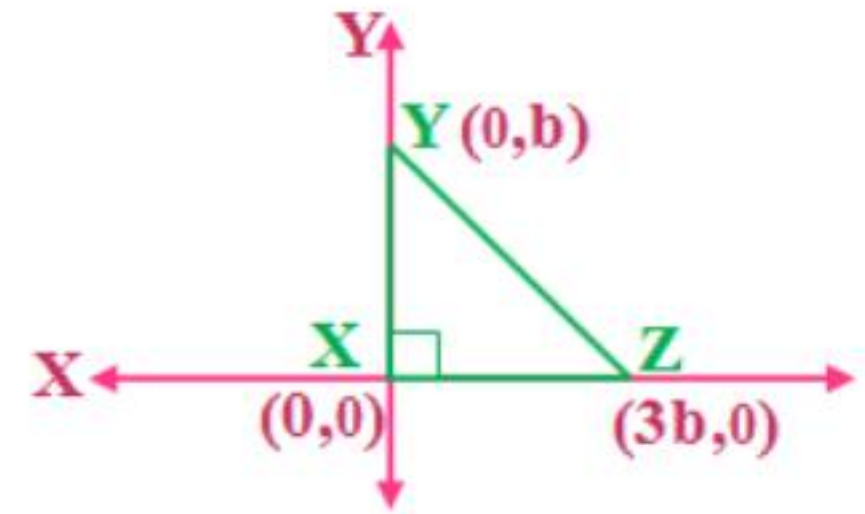
تدرب وحل المسائل

ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوي الإحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه:

(7)

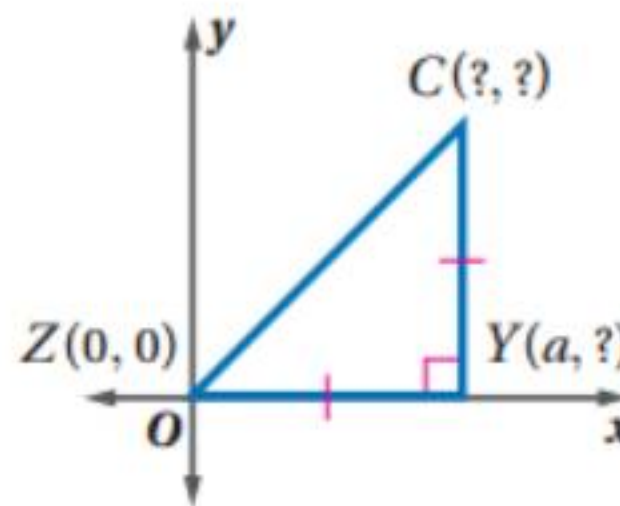


(8)



أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي: المثال ٢

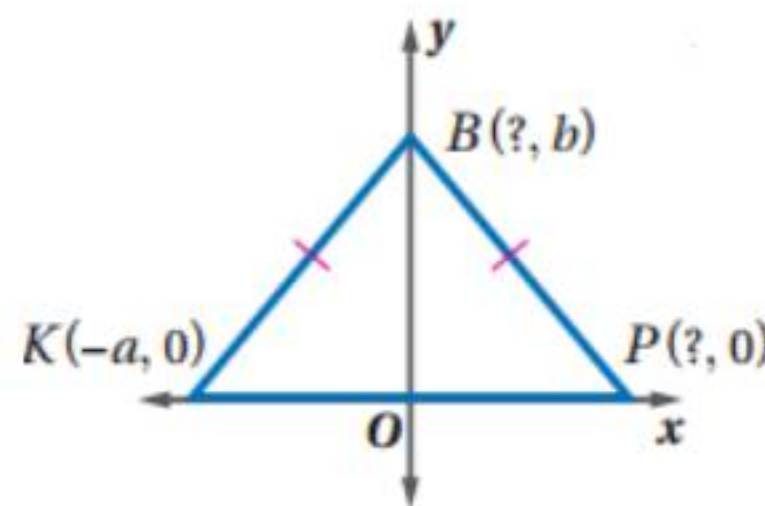
(9)



وبما أن الرأس Y يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y=0$ وتكون الرأس $Y:(a,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن تكون الرأس $C:(a,a)$

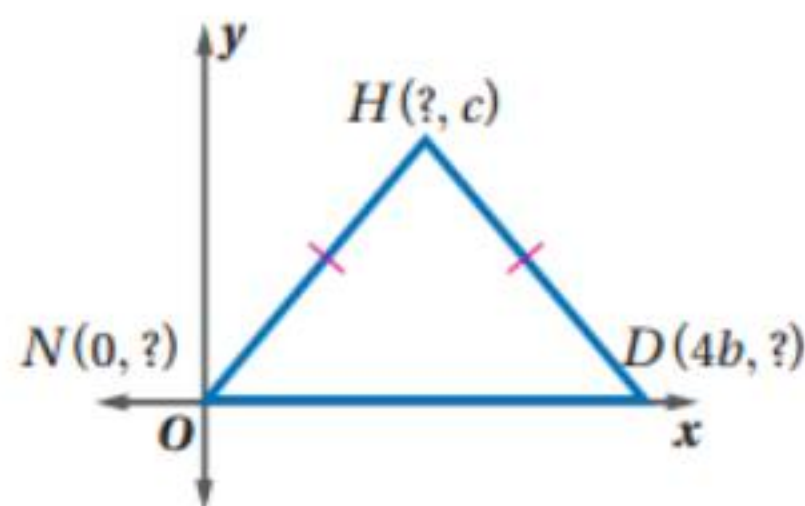
(10)



وبما أن الرأس B يقع على المحور Y فإن الإحداثي $X=0$ وتكون الرأس $B:(0,b)$

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن B تقع في المنتصف إذن النقطة $P:(a,0)$

(11)



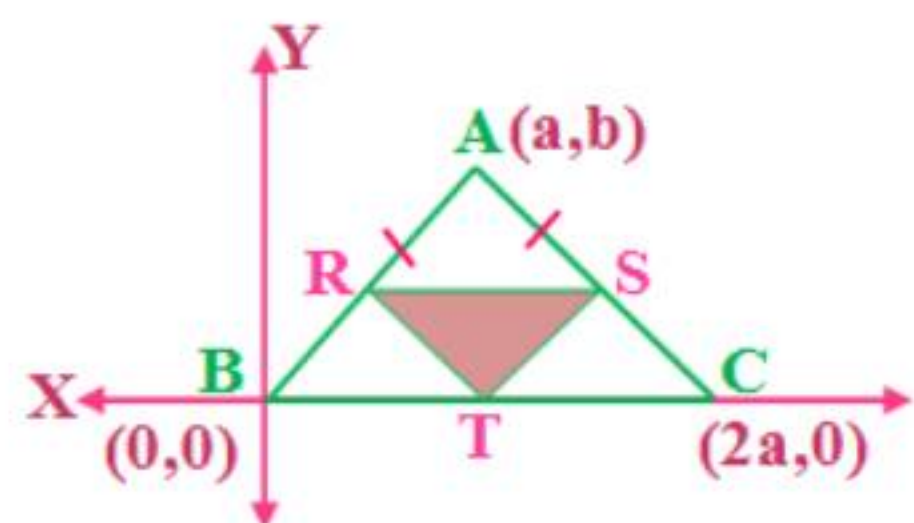
بما أن الرأس N يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0,0)$

وبما أن الرأس D يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y=0$ وتكون الرأس $D: (4b, 0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس H يقع في منتصف المسافة بين $0, 4b$ ويكون $2b$ إذن الإحداثي الراسي $H: (2b, c)$

برهان:

(12)



إحداثيات R هي $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

إحداثيات S هي $\left(\frac{a+2a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

إحداثيات T هي $\left(\frac{2a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (a, 0)$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{3a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$$

$$RT = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$$

الاحظ أن $RT = ST$ ، وهذا يعني أن $\overline{RT} \cong \overline{ST}$ ، لذا فالمثلث $\triangle RST$ متطابق الضلعين.

(13)

إحداثيات S هي $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

وإحداثيات T هي $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

$$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = a$$

$$ST = \frac{1}{2}AB \text{ إذن}$$

(14) جغرافيا:

$$\sqrt{(16.9 - 17.5)^2 + (42.58 - 44.16)^2} \approx 1.69 \text{ المسافة بين جيزان ونجران:}$$

$$\sqrt{(16.9 - 18.3)^2 + (42.58 - 42.8)^2} \approx 1.42 \text{ المسافة بين جيزان وخميس:}$$

$$\sqrt{(17.5 - 18.3)^2 + (44.16 - 42.8)^2} \approx 1.58 \text{ المسافة بين نجران وخميس:}$$

وبما أن هذه المسافات مختلفة، فإن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضح إجابتك:

(15)

$$m_{(x,y)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2h - 0}{2h - 0} = 1$$

$$m_{(y,z)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2h}{4h - 2h} = -1$$

$$m_{(z,x)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 0}{4h - 0} = 0$$

ميل XY يساوي 1، ميل YZ يساوي -1 ميل ZX يساوي صفرا
وبما أن ناتج ضرب ميلي ضلعين في المثلث يساوي -1 فإنه قائم الزاوية.

(16)

$$m_{(x,y)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h - 0}{1 - 0} = h$$

$$m_{(y,z)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - h}{2h - 1} = \frac{-h}{2h - 1}$$

$$m_{(z,x)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 0}{2h - 0} = 0$$

ميل XY يساوي h ، ميل YZ يساوي $\frac{-h}{2h - 1}$ ميل ZX يساوي صفرا

ولا يوجد ميلان ناتج ضربهما يساوي -1 إذن المثلث ليس قائم الزاوية

(17) نزهة:

ميل الطريق الواصل بين الخيمتين يساوي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 25}{12 - 0} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}$$

وميل الطريق بين موقع الإدارة والخيمة الواقعة عند (12, 9) يساوي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 0}{12 - 0} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

وبما أن $\frac{3}{4} \times \frac{-4}{3} = -1$ ، فإن المثلث المتشكل من الخيمتين وإدارة المتنزة مثلث قائم الزاوية.

(18) رياضة مائية:

(a)

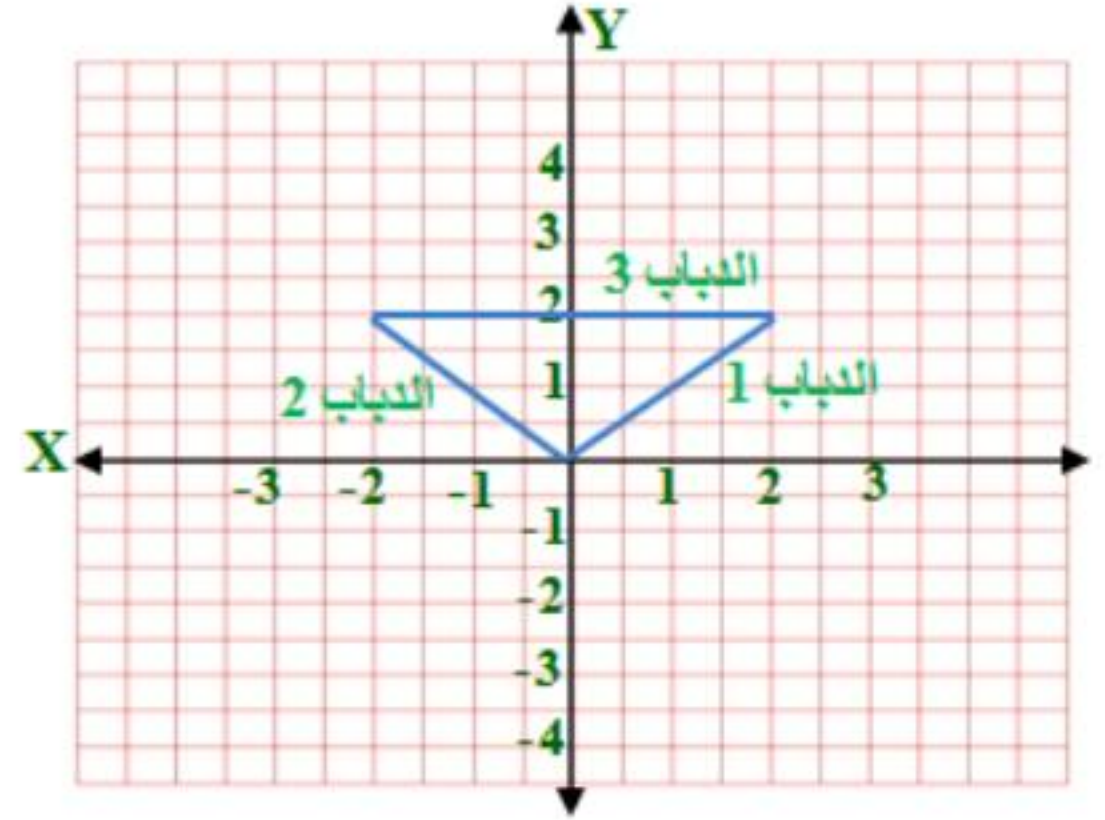
القارب الأول يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للشرق من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات = 0

لذا ميل معادلة سير القارب الأول = 1، معادلته هي $y = x$

بالمثل القارب الثاني يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للغرب من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات = 0

لذا ميل معادلة سير القارب الثاني = (-1) و معادلته هي $y = -x$

القارب الثالث يسير إلى الشمال و هذا يعني على محور الصادات، لذا معادلة المستقيم هي $x = 0$



(b)

المسافة بين الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني $300m$ ، لذا فإن هذين الضلعين متطابقان. ويكون المثلث المتكون من الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث المتطابق الضلعين.

(c)

الدباب الأول سار نفس الوحدات الى الشمال و الشرق من نقطة الأصل لذا مسار الدباب الاول يعتبر وتر للمثلث القائم المتطابق الأضلاع .

نفرض x طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الأضلاع .

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$2x^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$x = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

بالمثل للدباب الثاني نفرض ان y طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الاضلاع.

$$2y^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$y = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

حيث أن مسار الدباب الاول يقع في الربع الاول ، لذا فإن إحداثياته هي:
 $(150\sqrt{2}, 150\sqrt{2})$

بالمثل الدباب الثاني يقع في الربع الثاني، لذا فإن إحداثياته هي:
 $(-150\sqrt{2}, 150\sqrt{2})$

الدباب الثالث سار إلى الشمال 212 yd على محور الصادات، لذا إحداثياته هي
 $(0, 212)$.

(d)

$$\therefore 150\sqrt{2} \approx 212.13$$

لذا يعتبر الثلاث دبابات لهما تقريبا نفس الإحداثي الصادي، أي تقريبا على استقامة واحدة

منتصف المسافة بين الدباب الاول و الثاني:

$$\left(\frac{150\sqrt{2} + (-150\sqrt{2})}{2}, \frac{212 + 212}{2} \right) = (0, 212)$$

و هذا هو موقع الدباب الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدد:

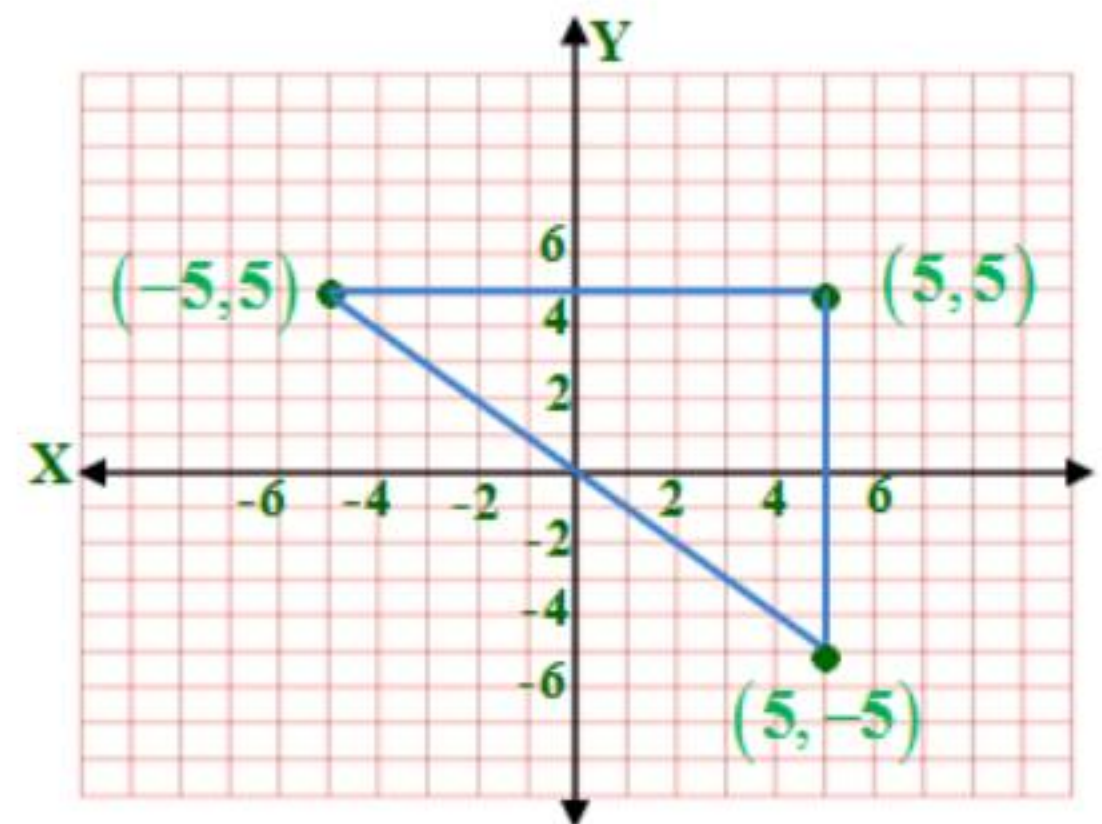
$$(a, 0): L \quad (19)$$

$$(2a, 0): L \quad (20)$$

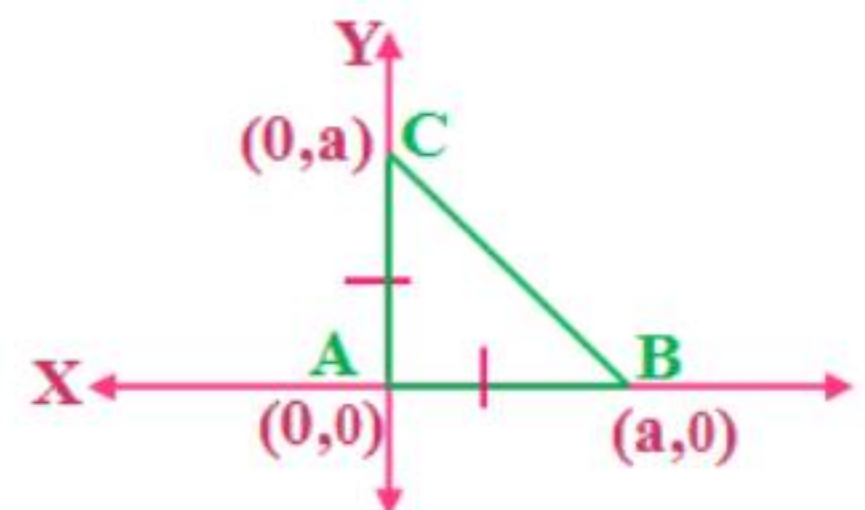
(21)

بما أن المثلث متطابق الضلعين والنقطة K تقع في منتصف المسافة بين الرأس J, L إذن النقطة $L: (4a, 0)$

(22) مسألة مفتوحة:



(23) تبرير:



بما أن الرأس الثالث يقع على محور y إذن $x = 0$ وتكون إحداثيات الرأس $(0, a)$

(24) اكتب:

(a) استعمال نقطة الأصل رأسا للمثلث يسهل العمليات الحسابية لان إحداثيات نقطة الأصل (0,0)

(b) رسم ضلع واحد على الأقل للمثلث على المحور X أو المحور y يسهل الحسابات عند إيجاد أطوال أضلاع لان احد الإحداثيات يكون 0

(c) رسم المثلث في الربع الأول يجعل جميع إحداثيات رؤوسه موجبة وهذا يسهل إجراء العمليات الحسابية.

تدريب على الاختبار المعياري

(25) D

$$m \angle B = 76^\circ$$

$$m \angle A = 76^\circ \div 2 = 38^\circ$$

$$m \angle C = 180 - (76^\circ + 38^\circ)$$

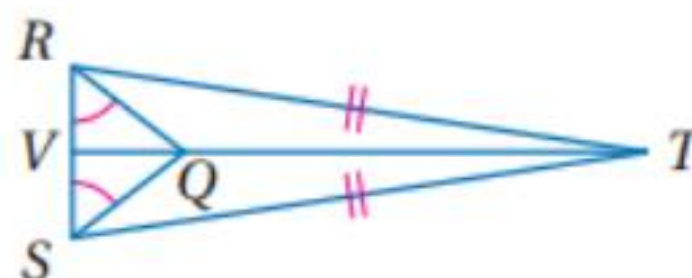
$$m \angle C = 66^\circ$$

(26) B

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس R يقع في منتصف المسافة بين $0, 2a$ ويكون a إذن الإحداثي الرأسي R : (a, b)

مراجعة تراكمية

انظر إلى الشكل المجاور



$$27) \angle TSR = \angle TRS$$

$$28) RQ = QS$$

$$29) \triangle RQV \cong \triangle SQV$$

$$30) m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - (-6)}{2 - (-2)} = \frac{12}{4} = 3$$

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية وقرب الناتج الى اقرب عشر:

$$31) X (5,4), Y (2,1)$$

$$XY = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (1 - 4)^2}$$

$$\sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} \approx 4.2$$

$$32) A (1,5), B (-2,-3)$$

$$AB = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-3 - 5)^2}$$

$$\sqrt{9 + 64} = \sqrt{73} \approx 8.5$$

$$33) J (-2,6), K (1,4)$$

$$JK = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (4 - 6)^2}$$

$$\sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3.6$$

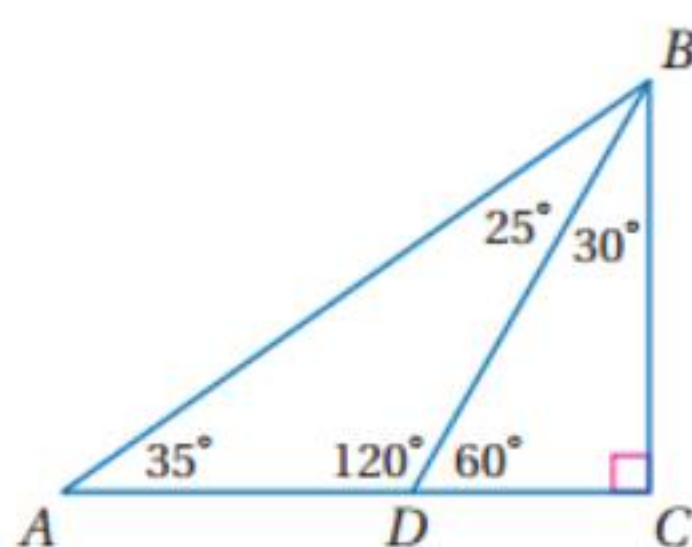
اختبر مفرداتك: حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ماتحته خط لتصبح صحيحة:

- (١) عبارة صحيحة
- (٢) خاطئة، منفرج الزاوية
- (٣) عبارة صحيحة
- (٤) خاطئة، المتطابق الضلعين.
- (٥) عبارة صحيحة
- (٦) خاطئة، البرهان الإحداثي.
- (٧) عبارة صحيحة

تصنيف المثلثات (ص: 142-148)

3-1

صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



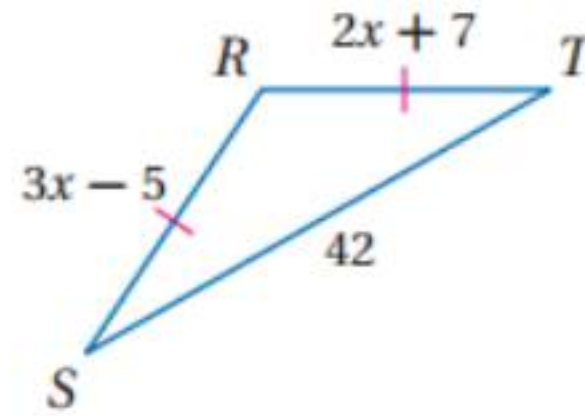
(٨) $\triangle ADB$ مختلف الأضلاع لأن جميع زواياه مختلفة.

(٩) $\triangle ADB$ قائم الزاوية لأن $\angle C = 90^\circ$.

(١٠) $\triangle ABC$ قائم الزاوية لأن $\angle C = 90^\circ$.

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات الآتية:

11)



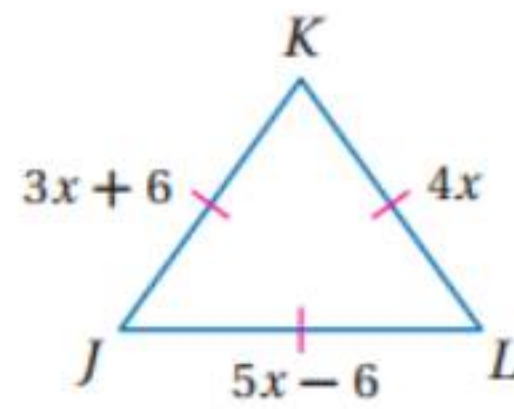
$$\therefore RT = RS$$

$$\therefore 3x - 5 = 2x + 7$$

$$3x - 2x = 7 + 5$$

$$x = 12$$

12)



$$\therefore KL = KJ$$

$$\therefore 3x + 6 = 4x$$

$$4x - 3x = 6$$

$$x = 6$$

خرائط:

المدن الثلاثة هم رؤوس مثلث

نفرض أن المسافة بين الرياض و المدينة المنورة x ، و المسافة بين المدينة المنورة و مكة المكرمة y ، المسافة بين الرياض و مكة المكرمة z .

$$x + y + z = 2092$$

$$x = y + 515$$

$$z = y + 491$$

$$(y + 515) + (y + 491) + y = 2092$$

$$3y + 1006 = 2092$$

$$3y = 1086$$

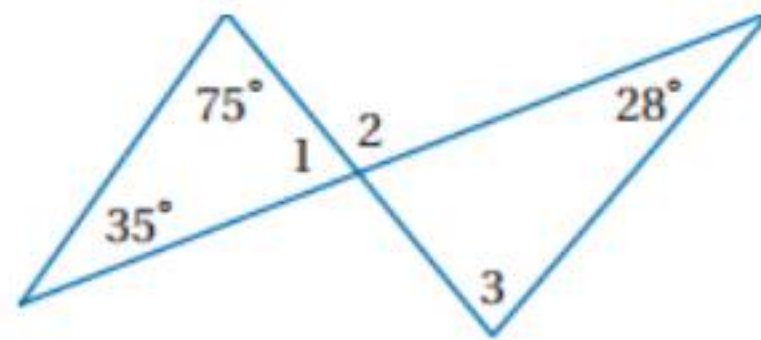
$$y = 362 \text{ km}$$

$$x = 362 + 515 = 877 \text{ km}$$

$$z = 491 + 362 = 853 \text{ km}$$

3-2 زوايا المثلثات (ص: 150-157)

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في الشكل المجاور:



14)

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle 1 = 180^\circ - (75 + 35)$$

$$\angle 1 = 70^\circ$$

15)

زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$\angle 2 = 180^\circ - 70$$

$$\angle 1 = 110^\circ$$

16)

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle 3 = 180^\circ - (110 + 28)$$

$$\angle 3 = 42^\circ$$

منازل: 17)



$$\angle x = 180^\circ - (38 + 38)$$

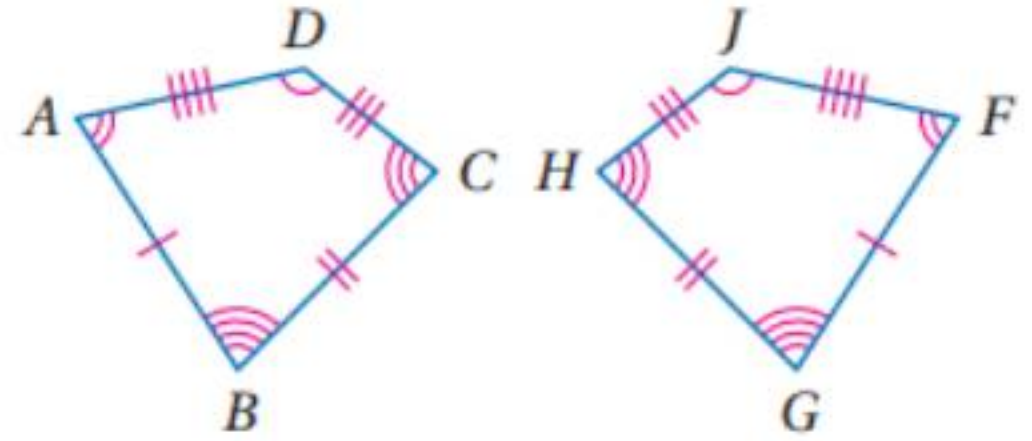
$$\angle x = 104^\circ$$

المثلثات المتطابقة (ص: 158-165)

3-3

بين أن كل مضعين مما يأتي متطابقان، وذلك بتحديد جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق:

(١٨)

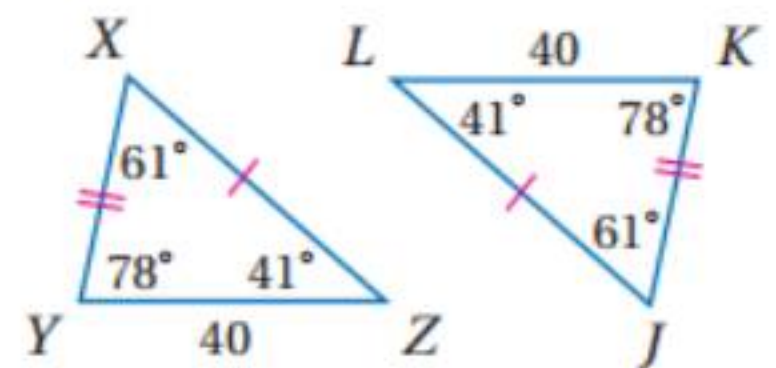


بما أن: $AB = FG, BC = GH, CD = HI, AD = IF$

$$\angle J = \angle D, \angle A = \angle F, \angle G = \angle B, \angle H = \angle C$$

إذن $ABCD \cong FGHI$ حسب SSS

(١٩)



بما أن: $\angle J = \angle X = 61^\circ, KJ = XY, LJ = XZ$

إذن $\triangle XYZ \cong \triangle JKL$ حسب SAS

(٢٠) فسيفساء:



أربع مثلثات تبدو متطابقة: $\triangle FBG, \triangle GCH, \triangle EDH, \triangle FAE$

إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS

3-4

حدد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ، ووضح إجابتك.
(٢١)

$$A(5,2), B(1,5)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (5-2)^2}$$

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$B(1,5), C(0,0)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-5)^2}$$

$$\sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$A(5,2), C(0,0)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-5)^2 + (0-2)^2}$$

$$\sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$X(-3,3), Y(-7,6)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7 + 3)^2 + (6 - 3)^2}$$

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$Y(-7,6), Z(-8,1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-8 + 7)^2 + (1 - 6)^2}$$

$$\sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$X(-3,3), Z(-8,1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-8 + 3)^2 + (1 - 3)^2}$$

$$\sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه ومتطابقة إذن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS

22)

$$A(3,-1), B(3,7)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 3)^2 + (7 + 1)^2}$$

$$\sqrt{0 + 64} = \sqrt{64} = 8$$

$$B(3,7), C(7,7)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (7 - 7)^2}$$

$$\sqrt{16 + 0} = 4$$

$$A(3,-1), C(7,7)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (7 + 1)^2}$$

$$\sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$

$$X (-7,0), Y (-7,4)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7 + 7)^2 + (4 - 0)^2}$$

$$\sqrt{0 + 16} = 4$$

$$Y (-7,4), Z (1,4)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 + 7)^2 + (4 - 4)^2}$$

$$\sqrt{64 + 0} = 8$$

$$X (-7,0), Z (1,4)$$

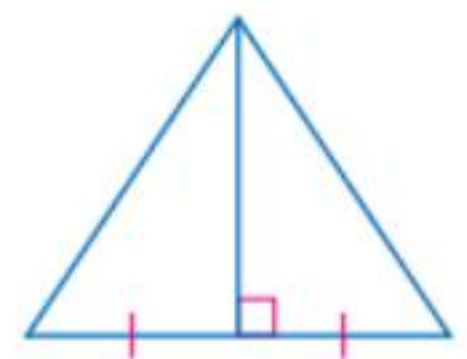
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 + 7)^2 + (4 - 0)^2}$$

$$\sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

ليس جميع الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه إذن $\triangle ABC \not\cong \triangle XYZ$
 حدد المسلمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل مثلثين فيما يأتي متطابقان.

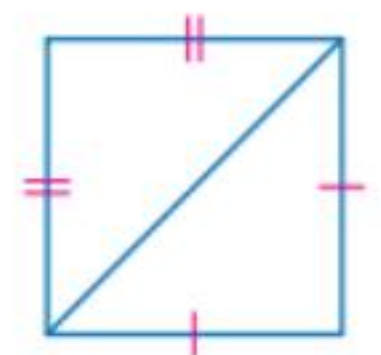
(٢٣)

مسلمة SAS ضلعين وزاوية محصورة بينهم

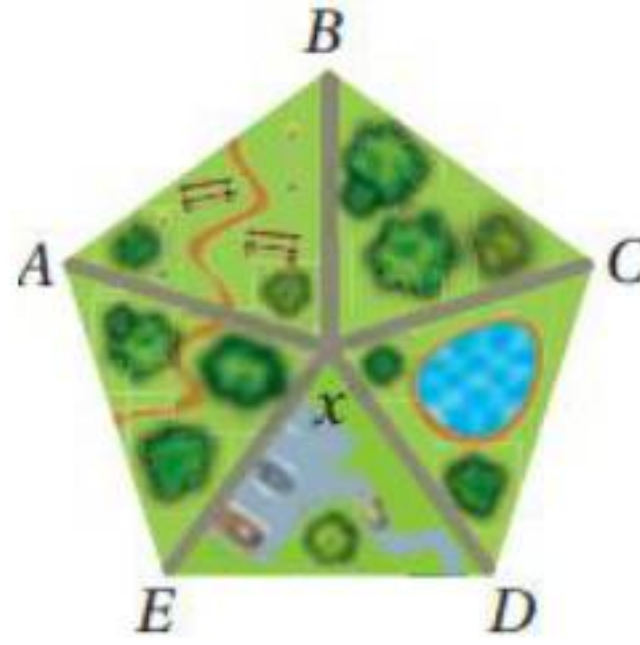


(٢٤)

مسلمة AAS



(25) متنزھات:



بما أن جميع ممرات المشاة لها نفس الطول والزوايا المركزية متساوية إذن:

$$BX = CX, AX = DX$$

$$\angle BXA = \angle CXD$$

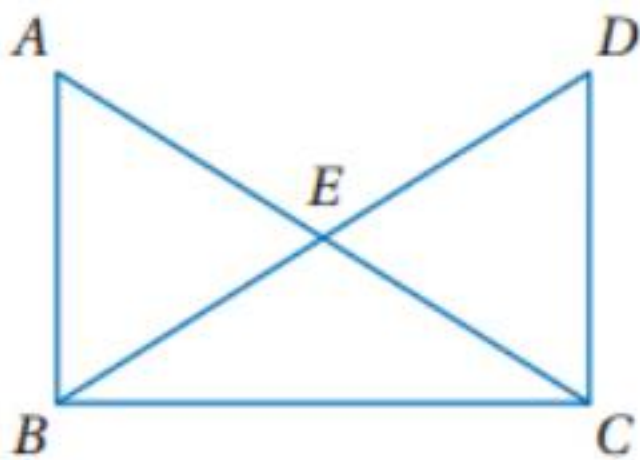
إذن $\triangle ABX \cong \triangle DCX$ حسب مسلمة SAS .

إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS

3-5

اكتب برهاننا ذا عمودين:

(٢٦)



البرهان: العبارات (المبررات)

$$\overline{AB} \cong \overline{DC}, AB \parallel DC \text{ (معطى)}$$

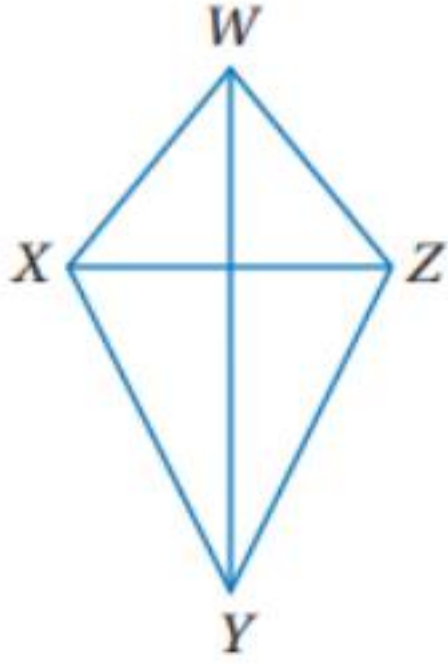
$$\overline{AB} = \overline{DC} \text{ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)}$$

$$\angle CDB = \angle ABD \text{ (زاويتان متبادلتان داخلياً)}$$

$$\angle BAC = \angle DCA \text{ (زاويتان متبادلتان داخلياً)}$$

إذن $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ حسب مسلمة ASA .

٢٧) الطائرة الورقية:



البرهان: العبارات (المبررات)

$\overline{WY}$ تنصف كل من $\angle XWZ, \angle XYZ$ (معطى)

$\angle XWY = \angle ZWY$ (تعريف التنصيف)

$\angle XYW = \angle WYZ$ (تعريف التنصيف)

$\overline{WY} = \overline{WY}$ (حسب خاصية الانعكاس)

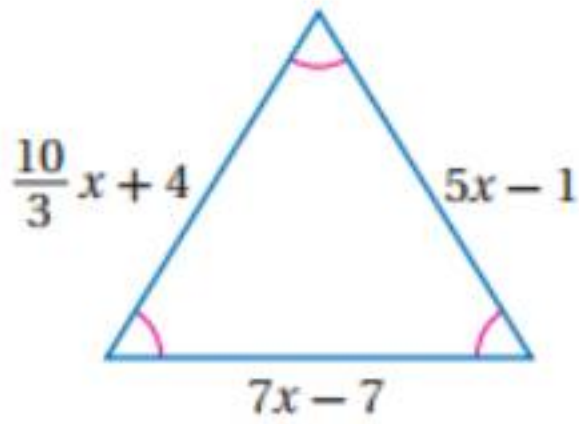
إذن $\triangle WXY \cong \triangle WZY$ حسب مسلمة ASA.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

3-6

أوجد قيمة كل من المتغيرين فيما يأتي:

28)



$$7x - 7 = 5x - 1$$

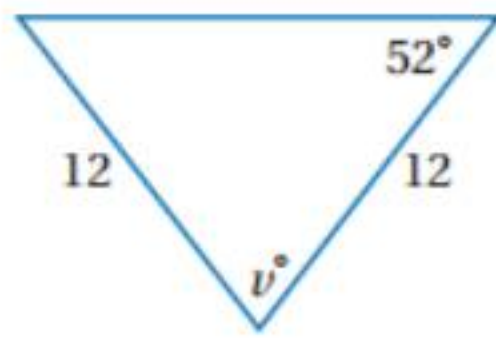
$$7x - 5x = -1 + 7$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

29)

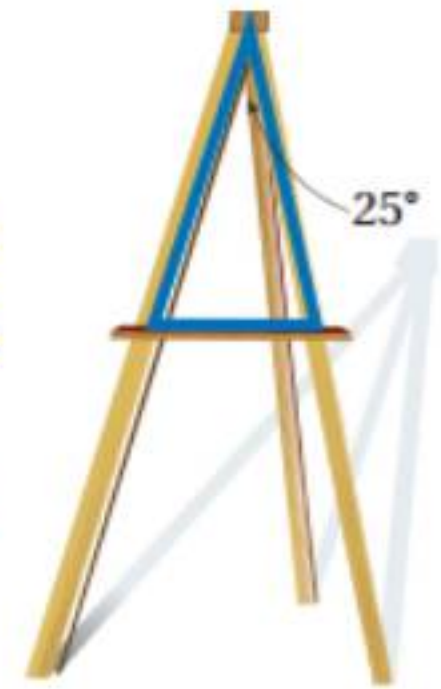


$$\angle v = 180^\circ - (52^\circ + 52^\circ)$$

$$v = 76^\circ$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

(30) رسم:



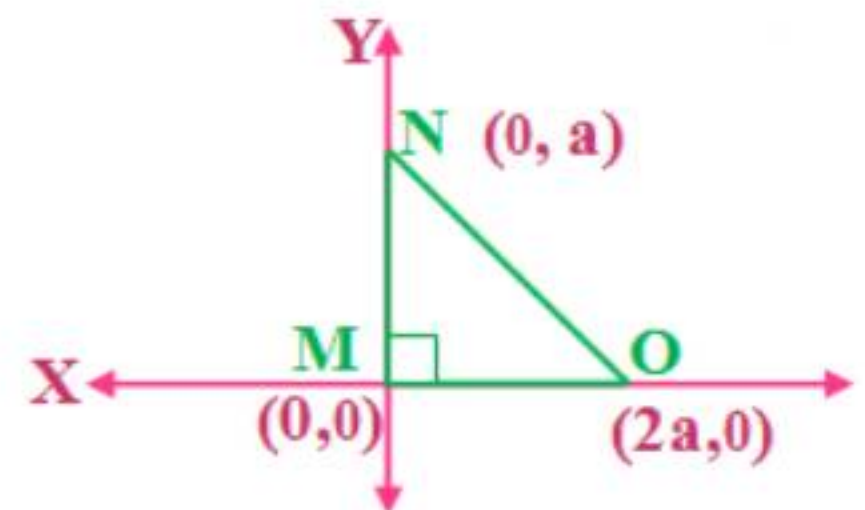
بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن زوايا القاعدة متساوية إذن قياس كل منهما:

$$(180 - 25) \div 2 = 77.5^\circ$$

المثلثات والبرهان الإحداثي (ص: 190-195)

3-7

(٣١)



اجعل نقطة الأصل رأساً للزاوية القائمة في المثلث.

اجعل احد ضلعي القائمة على المحور x والضلوع الآخر على المحور y .

بما أن النقطة O على المحور x إذن فإن إحداثيها $0 = y$ وإحداثيها $2a = x$

بما أن النقطة N على المحور y إذن فإن إحداثيها $0 = x$ وإحداثيها $a = y$

(32) جغرافيا:



نفرض أن حائل $A = (3,5)$

نفرض أن بريدة $B = (6,3)$

نفرض أن المدينة المنورة $C = (0,0)$

$A (3,5), B (6,3)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6 - 3)^2 + (3 - 5)^2}$$

$$\sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$B (6,3), C (0,0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0 - 6)^2 + (0 - 3)^2}$$

$$\sqrt{36 + 9} = 45$$

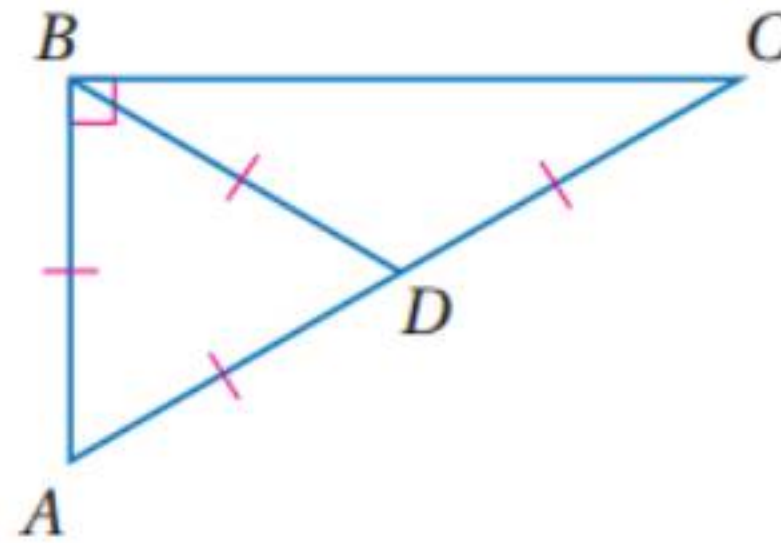
$A (3,5), C (0,0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 5)^2}$$

$$\sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

بما أن جميع أطوال أضلاع المثلث مختلفة إذن المثلث مختلف الأضلاع.

صنف كل من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



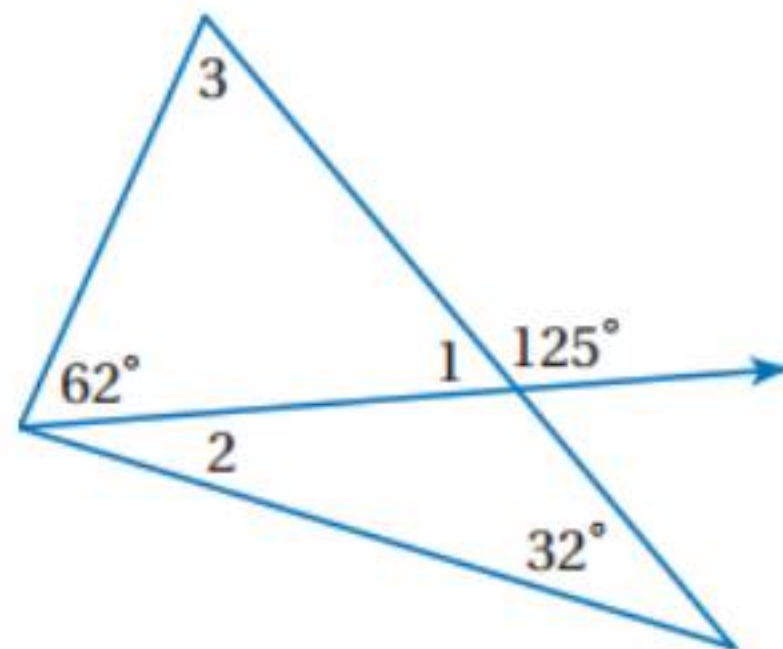
(1) $\triangle ABD$ متطابق الزوايا لأن جميع أطوال أضلاع متساوية حسب نظرية المثلث المتطابق الاضلاع.

(2) $\triangle ABC$ قائم الزاوية لأن $\angle B = 90^\circ$.

(3) $\triangle BDC$ منفرج الزاوية لأن

حسب نظرية المثلث المتطابق الضلعين. $\angle CBD = 30^\circ, \angle BCD = 30^\circ, \angle BDC = 120^\circ$

أوجد قياس كل زاوية مرقمة:



4)

$\angle 1 = 180^\circ - 125^\circ$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$\angle 1 = 55^\circ$$

5)

$$\angle 1 = \angle 2 + 32^\circ$$

حسب نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$$55^\circ = \angle 2 + 32^\circ$$

$$\angle 2 = 55^\circ - 32^\circ = 23^\circ$$

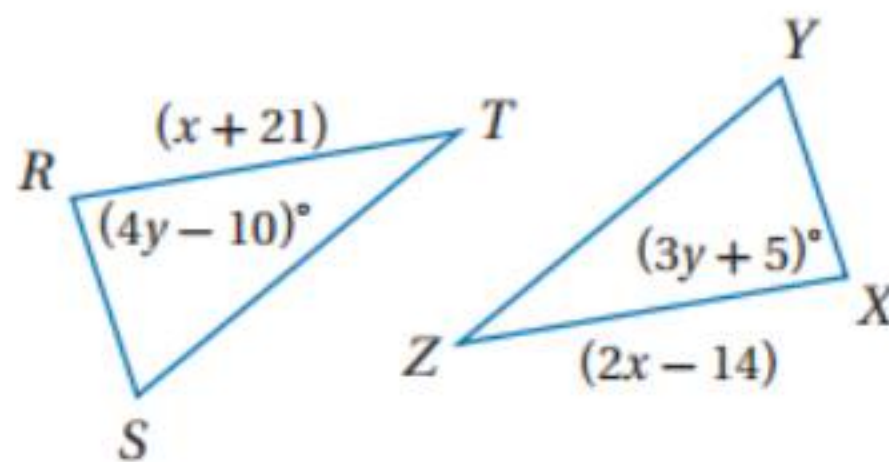
6)

$$\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + 62^\circ)$$

$$\angle 3 = 180^\circ - (55^\circ + 62^\circ)$$

$$\angle 3 = 63^\circ$$

في المثلثين أدناه أوجد قيمة x, y :



7)

$$\therefore \triangle RST \cong \triangle XYZ$$

$$\therefore RT = XZ$$

$$2x - 14 = x + 21$$

$$2x - x = 21 + 14$$

$$x = 35$$

8)

$$\therefore \triangle RST \cong \triangle XYZ$$

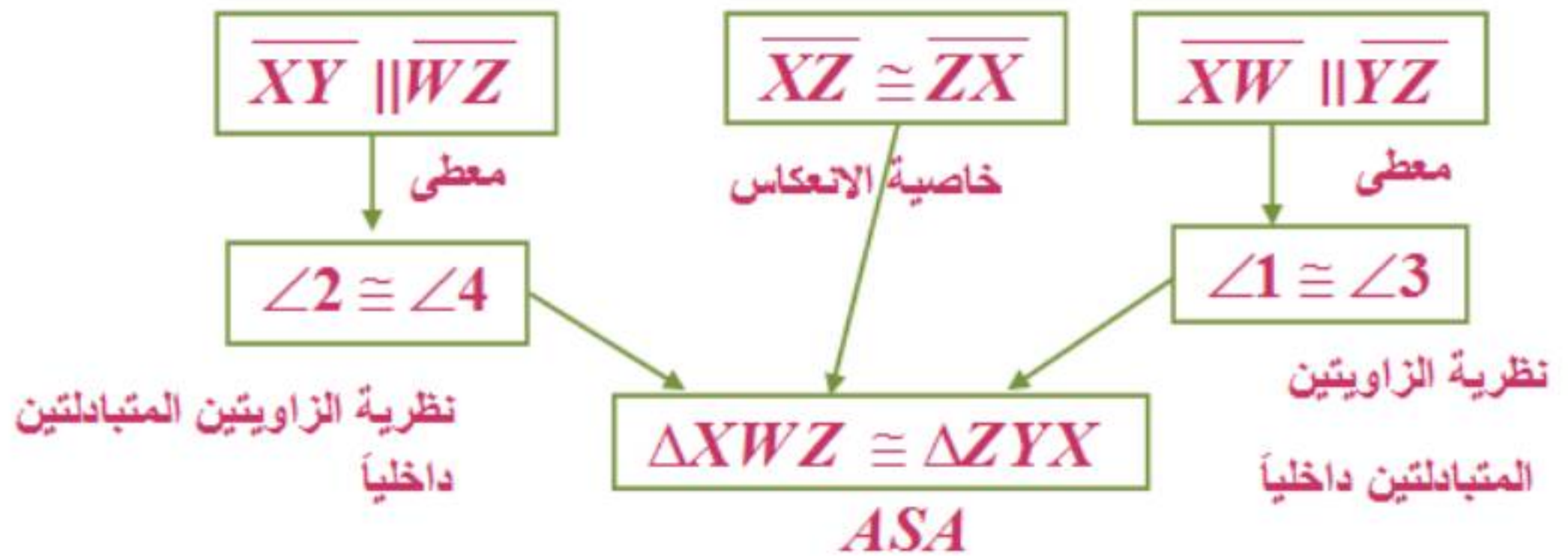
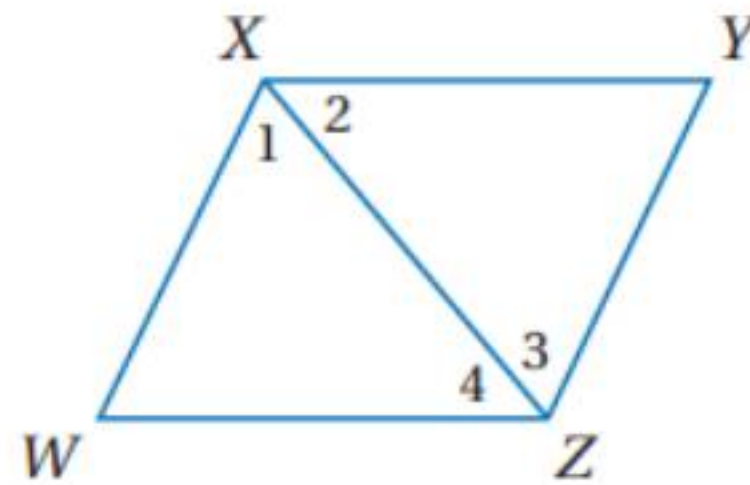
$$\therefore \angle TRS = \angle ZXY$$

$$4y - 10 = 3y + 5$$

$$4y - 3y = 5 + 10$$

$$y = 15$$

(9) برهان:



اختبار من متعدد:

(10) C

بما أن المثلث الذي رأسه 116° متطابق الأضلاع إذن زوايا قاعدته متساوية.

زاوية قاعدة المثلث الذي رأسه 116° : $116^\circ : 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$

إذن كل زاوية من زوايا القاعدة $32^\circ = 64^\circ \div 2$

وبذلك تكون إحدى زوايا القاعدة للمثلث الذي رأسه x :

$$180^\circ - (72^\circ + 32^\circ) = 76^\circ$$
 لأنهما زاويتان متجاورتان على مستقيم

وبما أن المثلث الذي رأسه x متطابق الضلعين إذن

$$\angle x = 180^\circ - (76 + 76)$$

$$\angle x = 28^\circ$$

(11)

نعم $\triangle TJD \cong \triangle SEK$ باستعمال مسلمة SSS

$$T (-4, -2), J (0, 5)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0 + 4)^2 + (5 + 2)^2}$$

$$\sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

$$J (0, 5), D (1, -1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (-1 - 5)^2}$$

$$\sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

$$T (-4, -2), D (1, -1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 + 4)^2 + (-1 + 2)^2}$$

$$\sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$S(-1,3), E(3,10)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 + 1)^2 + (10 - 3)^2}$$

$$\sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

$$E(3,10), K(4,4)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (4 - 10)^2}$$

$$\sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

$$S(-1,3), K(4,4)$$

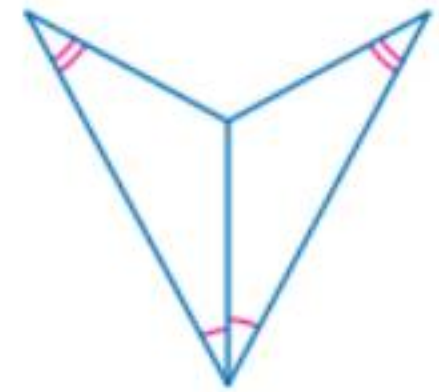
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 + 1)^2 + (4 - 3)^2}$$

$$\sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

حدد النظرية أو المسلمة التي يمكن لإثبات أن كل زوج من أزواج المثلثات متطابق واكتب (غير ممكن) إذا تعذر إثبات التطابق:

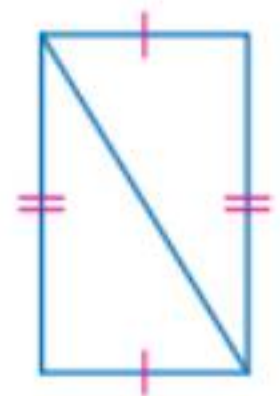
(12)

مسلمة AAS



(13)

مسلمة SSS



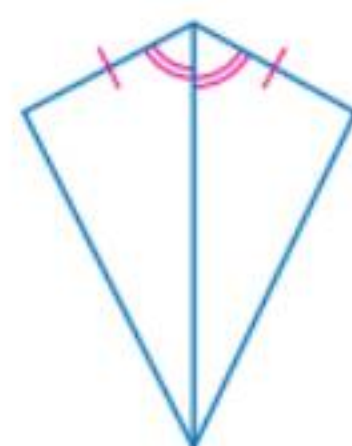
(14)

غير ممكن

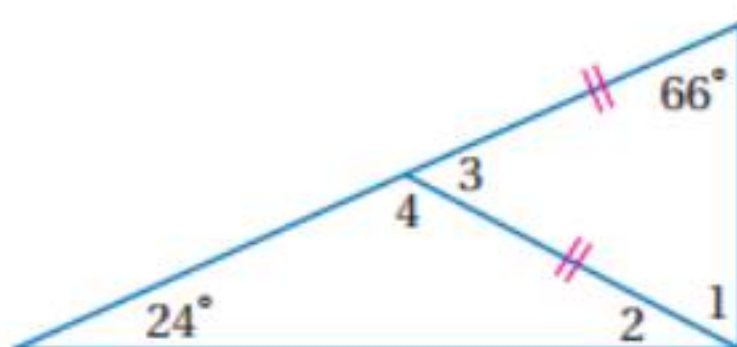


(15)

مسلمة SAS



أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:



16)

لأن المثلث متطابق الضلعين

$$\angle 1 = 66^\circ$$

17)

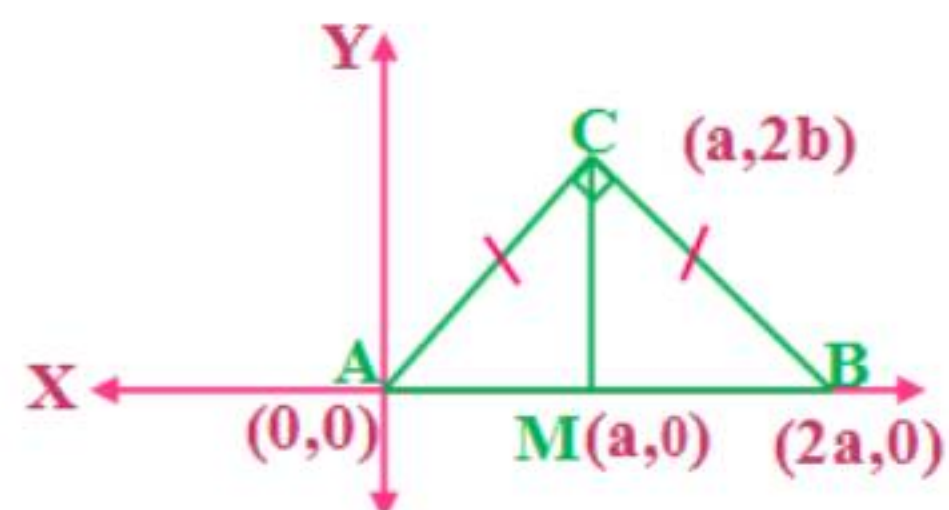
$$(\angle 1 + \angle 2) = 180 - (66 + 24)$$

$$(\angle 1 + \angle 2) = 90^\circ$$

$$\angle 2 = 90^\circ - 66^\circ$$

$$\angle 2 = 24^\circ$$

(18) برهان:



نقطة منتصف AB هي $(a,0)$

معطى

ميل AB يساوي صفرا

ميل CM غير معرف

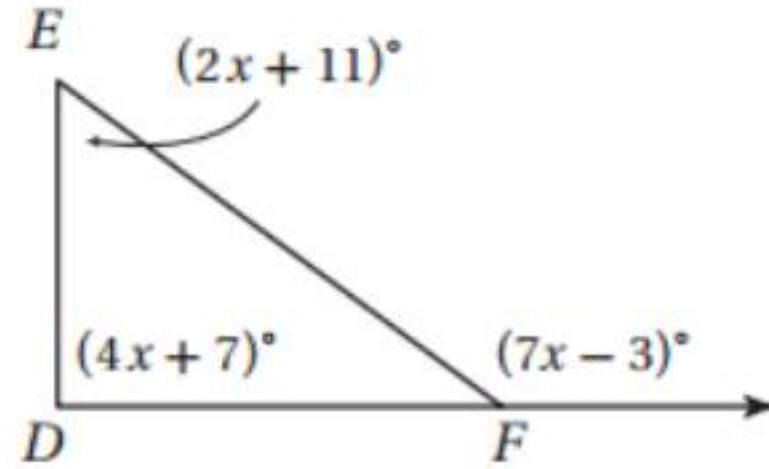
إذن فهو أفقي

إذن CM خط رأسي

$AB \perp CM$

تمارين ومسائل

(١) صنف $\triangle DEF$ حسب زواياه



زاوية $\angle F$ الخارجة عن المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخلتين البعديتين إذن:

$$(7x - 3)^\circ = (2x + 11)^\circ + (4x + 7)^\circ$$

$$7x - 3 = 6x + 18$$

$$7x - 6x = 18 + 3$$

$$x = 21$$

$$\angle FED = 2x + 11 = 2 \times 21 + 11$$

$$\angle FED = 53^\circ$$

$$\angle EDF = 4x + 7 = 4 \times 21 + 7$$

$$\angle EDF = 91^\circ$$

$$\angle EFD = 180^\circ - (84 + 53)$$

$$\angle EFD = 36^\circ$$

هذا المثلث منفرج الزوايا لأنه يحتوي على زاوية أكبر من 90°

(٢) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $(2, 4), (0, -2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 4}{0 - 2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

التعويض بالنقطة $(2, 4)$ في معادلة المستقيم

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 3(x - 2)$$

$$y - 4 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 6 + 4$$

$$y = 3x - 2$$

(٣)

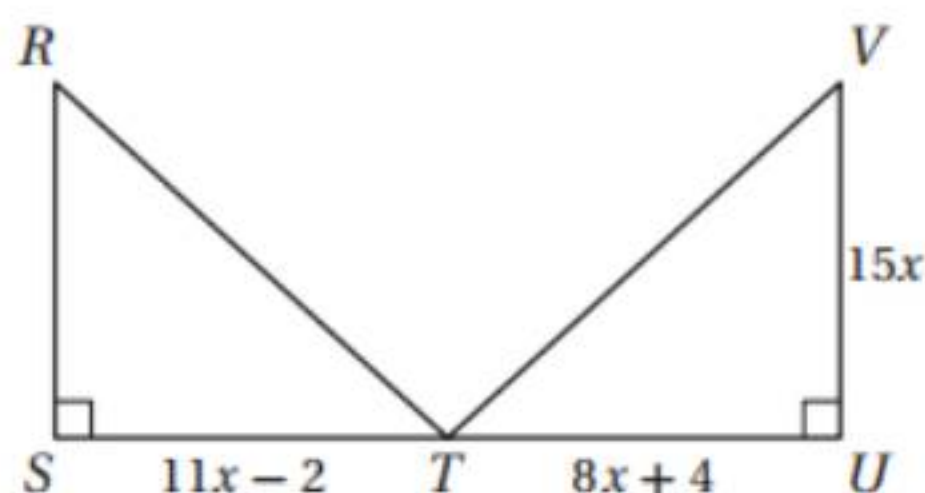
مساحة المستطيل = الطول في العرض

بفرض أن الطول س العرض ص

$$١٠٠٠ = س \times ص$$

إذن ضلعي المستطيل ٤٠ و ٢٥

(٤)



$$\therefore \triangle RST \cong \triangle VUT$$

$$\therefore ST = UT$$

$$11x - 2 = 8x + 4$$

$$11x - 8x = 4 + 2$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$$ST = 11x - 2 = 11 \times 2 - 2 = 20$$

$$RS = UV$$

$$RS = 15x = 15 \times 2$$

$$RS = 30$$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة في الارتفاع

$$300 = 30 \times 20 \times \frac{1}{2} = RS \times ST \times \frac{1}{2} = \text{مساحة المثلث}$$

أسئلة الاختيار من متعدد

1) $D : \angle 1 = \angle 2 = 110^\circ$

زاويتان متبادلتان خارجياً

2) D : مختلف الأضلاع

3) $C : \triangle WXY \cong \triangle JKI$

4) A

$$\angle RTS = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\angle RTS = 55^\circ$$

$$\angle R = 180^\circ - (55^\circ + 68^\circ)$$

$$\angle R = 57^\circ$$

5) B

$$180^\circ - 2(44^\circ) = 92^\circ$$

6) A

$$180^\circ - (70 + 47) = 63^\circ$$

حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle 1 = 180^\circ - (63 + 32) = 85^\circ$$

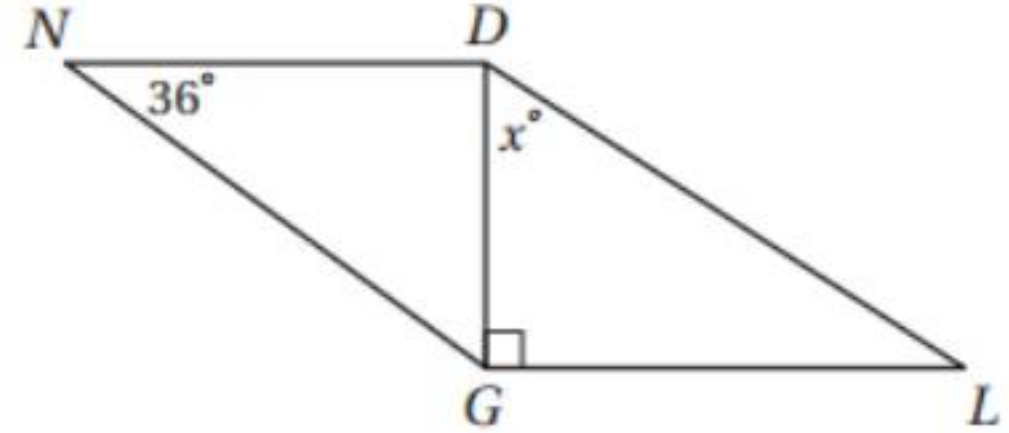
حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

وحسب نظرية الزاويتان المتقابلان بالرأس متساويتان

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(٧) إجابة شبكية:



$$\triangle NDG \cong \triangle LGD \because$$

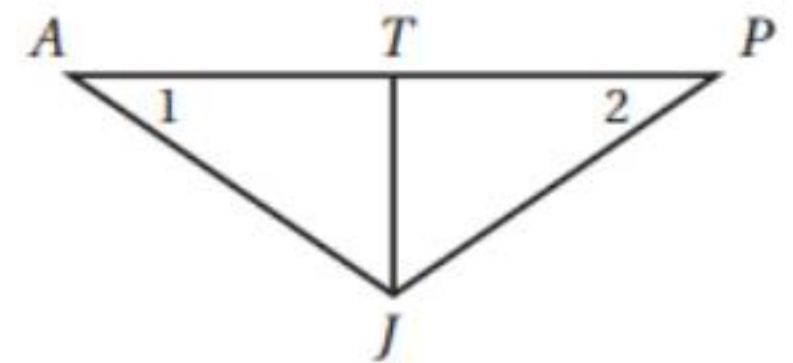
$$\angle LDG = \angle DNG \therefore$$

$$36^\circ = x^\circ$$

(٨) اكتب عكس العبارة الآتية:

إذا كنت أنا الخاسر فإنك تكون الرابع

(٩)



بما أن $\angle 1 = \angle 2$ إذن $\overline{JP} = \overline{JA}$ عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$$\overline{TJ} = \overline{JT} \text{ خاصية الانعكاس}$$

إذن $\triangle PTJ \cong \triangle ATJ$ حسب مسلمة AAS.

١٠) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, 3)$, $(4, -5)$ بصيغة الميل والمقطع

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 3}{4 - 0} = \frac{-8}{4} = -2$$

التعويض بالنقطة $(0, 3)$ في معادلة المستقيم

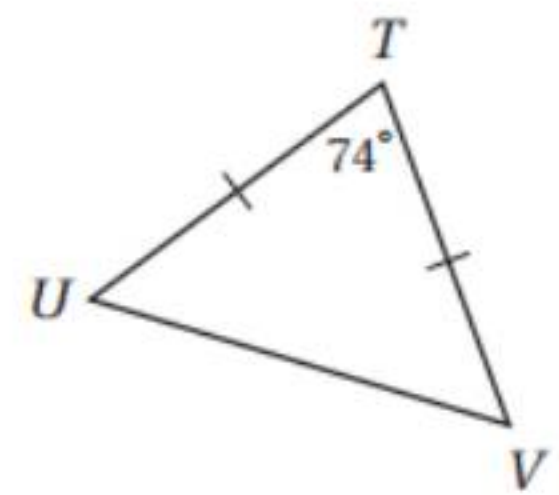
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -2(x - 0)$$

$$y - 3 = -2x + 0$$

$$y = -2x + 3$$

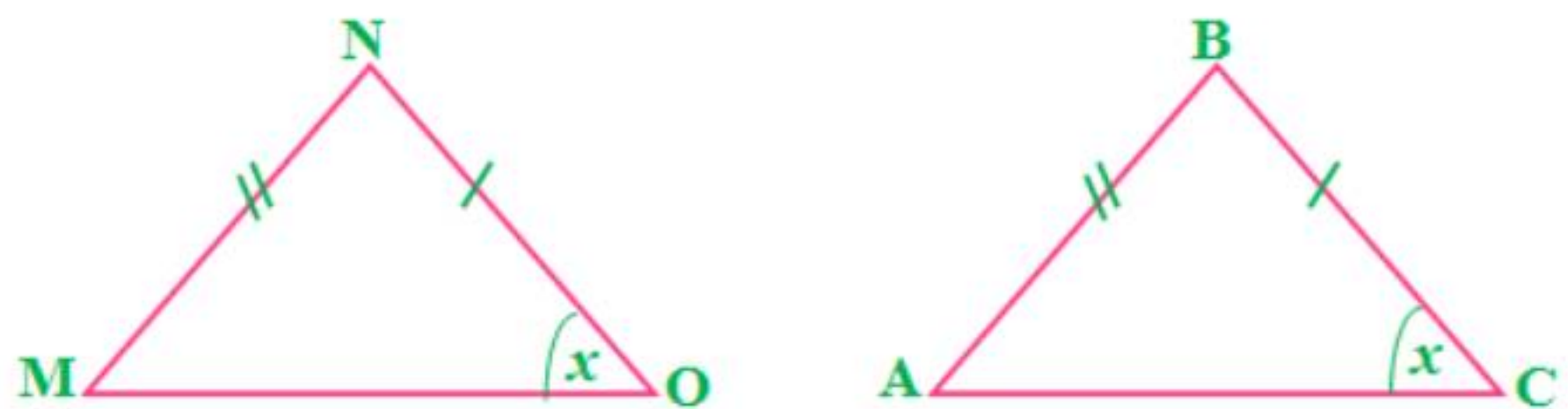
١١) أوجد $\angle TUV$ في الشكل أدناه:



بما أن $\triangle UTV$ متطابق الضلعين إذن $\angle TUV = \frac{(180^\circ - 74^\circ)}{2}$

$$53^\circ = \angle TUV$$

١٢)



لا يمكن تطابق المثلثين لأنه لا يوجد مسلمة SSA

$$\triangle EFG \cong \triangle DCB$$

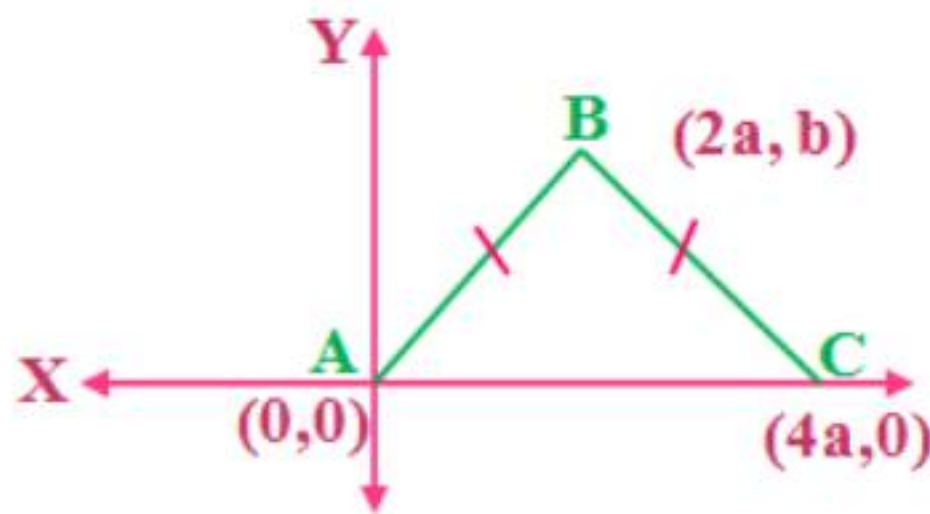
$$EF \cong DC, FG \cong CB, EG \cong DB$$

$$\angle EFG \cong \angle DCB, \angle FGE \cong \angle CBD, \angle FEG \cong \angle CDB$$

أسئلة ذات إجابات مطولة

14)

a)



b)

$$A(0,0), B(2a,b)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2a - 0)^2 + (b - 0)^2}$$

$$\sqrt{4a^2 + b^2} = 2a + b$$

c)

$$B(2a,b), C(4a,0)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4a - 2a)^2 + (0 - b)^2}$$

$$\sqrt{4a^2 + b^2} = 2a + b$$

d)

نستنتج من الفرعين c, b أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين في AB, BC .