

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



المملكة العربية السعودية

الإحصاء

التعليم الثانوي - نظام المسارات
السنة الثالثة

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

يُوزع مجاناً دون إلزام

٣) وزارة التعليم، ١٤٤٤هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

وزارة التعليم

الإحصاء - التعليم الثانوي - نظام المسارات - السنة الثالثة . /

وزارة التعليم . - ط ١٤٤٥ . - الرياض ، ١٤٤٤ هـ

١٨٤ ص ؛ ٢١ × ٢٥,٥ سم

ردمك ٩ - ٤٥٠ - ٥١١ - ٦٠٣ - ٩٧٨

١ - الرياضيات - تعليم ٢ - الحقائق التعليمية ٣ - التعليم الثانوي -

السعودية أ. العنوان

١٤٤٤/٩٣٠٢

ديوي ٥١٠،٧١٢

رقم الإيداع: ١٤٤٤/٩٣٠٢

ردمك: ٩ - ٤٥٠ - ٥١١ - ٦٠٣ - ٩٧٨

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم

www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"



ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين والمعلمات، والطلاب والطالبات، وأولياء الأمور، وكل مهتم بالتربية والتعليم؛
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.



fb.iien.edu.sa

أخي المعلم/أختي المعلمة، أخي المشرف التربوي/أختي المشرفة التربوية؛
نقدر لك مشاركتك التي ستسهم في تطوير الكتب المدرسية الجديدة، وسيكون لها الأثر الملموس في دعم
العملية التعليمية، وتجويد ما يقدم لأبنائنا وبناتنا الطلبة.



fb.iien.edu.sa/BE

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الفصل الرابع

نظرية الاحتمالات Probability Theory





الاحتمالات Probability

الدرس الأول

- أتعرف المفاهيم والمصطلحات الأساسية في الاحتمال.
- أحسب الاحتمال في التجارب العشوائية.



لماذا نحتاج الاحتمالات في حياتنا اليومية؟



تعد الاحتمالات من العلوم المستخدمة في الحياة اليومية على نطاق واسع، حيث نتعرض للعديد من المواقف المحيرة، والعديد من الخيارات التي نريد تحديد الخيار الأفضل منها، فعلى سبيل المثال؛ لو أرادت وزارة التعليم إنشاء عدد من المدارس في إحدى المدن، فلا بد أن تأخذ في الاعتبار إمكانية استيعاب الزيادة في عدد الطلاب وعدد المعلمين.

يُعتمد في عملية اتخاذ القرارات إلى حد كبير، سواءً كانت قرارات فردية أم جماعية على الاحتمالات للظواهر التي من المتوقع حدوثها أو عدم حدوثها؛ ومن هنا يجدر بالذكر أن النظريات والطرق الإحصائية مرتبطة ارتباطاً قوياً بالاحتمالات، لذا نجد علم الاحتمالات متداخلاً بشكل كبير مع علم الإحصاء؛ فمثلاً يعتمد التنبؤ بالأحوال الجوية وباحتمال حدوثها على معلومات إحصائية سابقة عن الطقس وتتبع الجو لفترة زمنية ما.



يعد علم الاحتمالات أحد فروع الرياضيات التطبيقية؛ الذي يهتم بدراسة فرصة حدوث ظاهرة معينة، على سبيل المثال: عند إلقاء قطعة نقود معدنية يظهر لنا أحد الحدين: صورة أو كتابة، ولكن لا يمكن التأكد ما هو الحدث الذي سيظهر منهما، فهنا يمكن القول بأن هناك فرصة لظهور الصورة بنسبة 50% أو أن فرصة ظهور الكتابة أيضاً 50%. من هذا المثال يمكن التمييز بين لفظي "مؤكد" و"فرصة" فالأول يدل على شيء نعلم كل الظروف التي تؤدي إلى حدوثه، بينما الثاني يدل على شيء لا نعلم تماماً كل الظروف التي تؤدي إلى حدوثه.

لاحظ:

إن لفظ (فرصة) يحمل المعنى نفسه للفظ (احتمال)، إلا أن (احتمال) هي الكلمة الأكثر شيوعاً في حياتنا اليومية والتي نستخدمها دائماً عندما نعبر عن أي شيء من المتوقع حدوثه.



تاريخ علم الاحتمالات

تاريخ نشوء علم الاحتمالات قديم منذ قدم البشرية، حيث ظهرت إشارات دالة على ذلك لدى اليونانيين والرومان، كما قدم المسلمون إسهامات مميزة في ذلك، ثم تلاحت أعمال العالم باسكال Pascal، وتبعه جيمس برنولي James Bernoulli بنظريته الشهيرة. وقد قدمت التقنية خدمات جليلة لتطوير هذا العلم؛ من حيث توفير الوقت والجهد لإجراء حسابات الاحتمال المعقدة والدقيقة.

سبق أن درست في الفصل الثالث التجربة العشوائية، التي وصفت بأنها: أي عملية يتم من خلالها الحصول على نتائج سواء كانت أرقاماً أم قياسات أم استجابات. بحيث إن النتائج الممكنة لهذه العملية معلومة مسبقاً. وتسمى مجموعة جميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية فضاء العينة ويرمز لها بالرمز S . والآن ستحسب احتمال كل نتيجة (حادثة) في هذه التجربة.

الاحتمال (Probability):

هو قياس إمكانية ظهور حادثة ما في تجربة عشوائية. ويرمز له عادةً بالرمز $P(A)$ ، حيث يقاس احتمال ظهورها باستخدام الصيغة الآتية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

مسلّمات الاحتمال (Probability Axioms):

- تتراوح قيمة الاحتمال لأي حادثة بين الصفر والواحد ويُعبر عن ذلك بـ: $0 \leq P(A) \leq 1$ ، حيث يشير الصفر إلى حادثة مستحيلة ويشير الواحد إلى حادثة مؤكدة.
- كلما زادت قيمة احتمال الحادثة، زاد احتمال وقوع تلك الحادثة.

في البداية نقوم بتسجيل جميع الاحتمالات الممكنة (التي يطلق عليها فضاء العينة ويرمز لها بالرمز S) التي تبلغ زوجاً مرتباً

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$

ثم تعريف الحدث - الذي يرمز له بالرمز A بأنه ظهور عددين زوجيين وهذا يعني جميع العناصر التي يكون فيها الزوج المرتب مكوناً من عددين زوجيين وعليه فإن عناصر الحد A هي

$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

بناءً على جميع ما سبق فإن الإجابة عن احتمال ظهور عددين زوجيين تكون بقسمة عدد الأزواج المرتبة الموجودة في الحدث A على عدد جميع الأزواج المرتبة الموجودة في فضاء العينة وهي:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

1 تحقق من فهمك

في تجربة رمي حجر النرد مرتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في الرمييتين؛ أوجد احتمال ظهور عددين زوجيين.

نظرية بيز Bayes's Theorem:



توماس جوشوا بيز عالم رياضيات وإحصائي وفيلسوف ووزير إنجليزي. من أشهر أعماله نظرية بيز في الاحتمالات. ولم ينشر بيز نظريته وإنما عدلت ونشرت بعد وفاته، وقد نتج عنها ما يُعرف بالاستدلال البيزي الذي يعد أحد أسس بناء خوارزميات الذكاء الاصطناعي وعلم الآلة.

تعدّ نظرية بيز من أشهر النظريات في علم الاحتمال، وتبنى عليها العديد من العمليات الإحصائية. حيث تهتم نظرية بيز بحساب احتمال وقوع حدث استناداً إلى معرفة الأسباب والظروف المؤدية لوقوعه. فعلى سبيل المثال عندما نعلم أن من أسباب سقوط الطائرات وجود خلل في المحرك، فإن حساب احتمال سقوط طائرة بعينها يصبح أكثر دقة إذا حسبنا احتمال أن يكون خلل المحرك هو المتسبب في سقوطها.

لابد من التعرف على قانون الاحتمال الكلي قبل دراسة قانون بيز؛ الذي يُعنى بحساب وقوع الحادثة دون النظر إلى مسبباتها.

لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n$ حوادث اتحادها يشكل المجموعة الشاملة، ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادلياً؛ يعني لا يوجد تقاطع بين أي اثنتين منها) ومعرفة على فضاء العينة S ، أي أن:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على فضاء العينة S نفسه، فإن:

أولاً: قانون الاحتمال الكلي (Law of Total Probability):

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \dots + P(A_n) P(B|A_n) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) P(B|A_k) \end{aligned}$$

ويمكن عرض قانون الاحتمال الكلي بواسطة الرسم الشجري الآتي (للحالة $n=3$ على سبيل المثال):

$$\begin{array}{lclclcl}
 & P(A_1) & & P(B|A_1) & & \\
 \swarrow & & & & & \\
 A_1 & \cdots & B | A_1 & \cdots & \Rightarrow & P(A_1) P(B|A_1) \\
 & P(A_2) & & P(B|A_2) & & \\
 A_2 & \cdots & B | A_2 & \cdots & \Rightarrow & P(A_2) P(B|A_2) \\
 & P(A_3) & & P(B|A_3) & & \\
 A_3 & \cdots & B | A_3 & \cdots & \Rightarrow & P(A_3) P(B|A_3)
 \end{array}$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

2

مثال

	A_1	A_2	A_3
غير تالف (G)	G_{A1}	G_{A2}	G_{A3}
تالف (B)	B_{A1}	B_{A2}	B_{A3}

(A_i) تعني إنتاج الآلة i
 (B_{A_i}) تعني الإنتاج التالف من الآلة i
 (G_{A_i}) تعني الإنتاج غير التالف من الآلة i

يتم إنتاج المصابيح الكهربائية في أحد المصانع بواسطة ثلاث آلات، حيث تنتج الآلة الأولى 20% وتنتج الآلة الثانية 30% وتنتج الآلة الثالثة 50%، من الإنتاج الكلي للمصنع، ومعلوم مسبقاً أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى 1% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية 4% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة 7%. إذا كانت التجربة هي اختيار مصباح واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي؛ فما احتمال أن يكون هذا المصباح تالفاً؟

الحل:

نعرف الحوادث الآتية:

الحادثة B وتعني إنتاج المصباح التالف.

الحادثة A_1 وتعني إنتاج الآلة الأولى للمصابيح.

الحادثة A_2 وتعني إنتاج الآلة الثانية للمصابيح.

الحادثة A_3 وتعني إنتاج الآلة الثالثة للمصابيح.

ويكون حساب الاحتمال لكل حادثة كما يأتي:

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2;$$

$$P(B|A_1) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$P(A_2) = \frac{30}{100} = 0.3;$$

$$P(B|A_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$P(A_3) = \frac{50}{100} = 0.5;$$

$$P(B|A_3) = \frac{7}{100} = 0.07$$

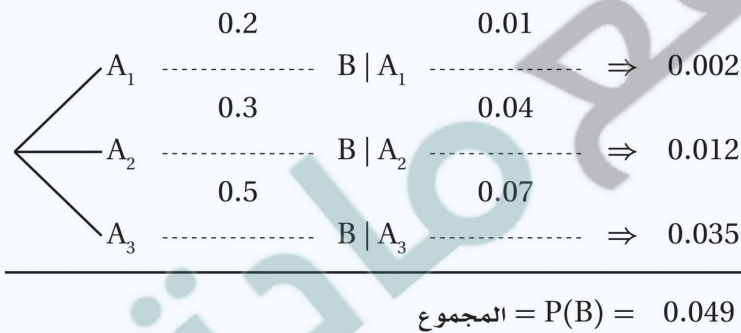
المطلوب إيجاد احتمال أن يكون المصباح تالفًا، أي $P(B)$

$$P(B) = \sum_{k=1}^3 P(A_k) P(B|A_k)$$

$$= P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + P(A_3) P(B|A_3)$$

$$= 0.2 \times 0.01 + 0.3 \times 0.04 + 0.5 \times 0.07 = 0.049$$

عرض الحل بالرسم الشجري:



$$P(B) = 0.049$$

ذكر في قانون الاحتمال الكلي الشرط "الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية

مثنى مثنى". ما أهمية هذا الشرط في تطبيق القانون؟ أعط أمثلة.



تفكير ناقد

تهتم نظرية بيز بحساب احتمال وقوع حدث استنادا إلى معرفة الأسباب والظروف المؤدية لوقوعه وحتى نضمن إجراء تحليل دقيق للأسباب المؤدية لوقوع الحدث فلا بد من التأكد من عدم تداخل تلك الظروف لنلا يؤدي ذلك إلى تداخل القيم عند تطبيق القانون؛ وبالتالي عدم التوصل لنتائج دقيقة؛ وبالنسبة لكون اتحادها يؤدي للمجموعة الشاملة؛ فإن ذلك يرجع إلى أن عدم تكوين المجموعة الشاملة سيعني بالضرورة وجود سبب محتمل لوقوع الحادث لم يؤخذ في الحسبان عند تطبيق القانون، وبالتالي عدم التوصل لنتائج دقيقة أيضا



1. في مثال (2) السابق؛ ما احتمال أن يكون المصباح غير تالف؟
2. يتم إنتاج قمصان رياضية في أحد المصانع بواسطة أربع آلات، حيث تنتج الآلة الأولى 20% وتنتج الآلة الثانية 30% وتنتج الآلة الثالثة 35% وتنتج الآلة الرابعة 15%، من الإنتاج الكلي للمصنع، ومعلوم مسبقاً أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى 2% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية 6% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة 9% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الرابعة 5%؛ إذا كانت التجربة هي اختيار قميص واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي؛ فما احتمال أن يكون هذا القميص تالفًا؟

من خلال المعلومات التي تم حلها في المثال (2) نستطيع الاستفادة منها هنا، بحيث يمكن تطبيق إحدى مسلما الاحتمالات التي درسها الطالب في المراحل السابقة وهي احتمال مكمل أي حدث وتمثل الواحد ناقص احتمالية الحدث نفسه معلومات المثال 2 المهمة في الإجابة على هذا السؤال هي احتمال أن يكون المصباح تالفًا هي **0.049**، عليه فإن احتمال أن يكون المصباح غير تالف هي:

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.049 = 0.951$$

2: من أجل تسهيل عملية حل المسألة لابد من تحويل العبارات إلى صيغ رياضية أو رموز لكي تسهل علينا عملية فهم المسألة وسرعة التعامل معها ولذلك نعرف الحوادث التالية :

الحادثة **B** وتعني الإنتاج التالف للآلة

الحادثة **A1** وتعني إنتاج الآلة الأولى للقمصان الرياضية

الحادثة **A2** وتعني إنتاج الآلة الثانية للقمصان الرياضية

الحادثة **A3** وتعني إنتاج الآلة الثالثة للقمصان الرياضية

الحادثة **A4** وتعني إنتاج الآلة الرابعة للقمصان الرياضية

ويكون حساب الاحتمال لكل حادثة كما يلي:

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2 ; P(B|A_1) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$P(A_2) = \frac{30}{100} = 0.3 ; P(B|A_2) = \frac{6}{100} = 0.06$$

$$P(A_3) = \frac{35}{100} = 0.35 ; P(B|A_3) = \frac{9}{100} = 0.09$$

$$P(A_4) = \frac{15}{100} = 0.15 ; P(B|A_4) = \frac{5}{100} = 0.05$$

المطلوب هو إيجاد احتمال أن يكون القميص تالفًا، أي

$$P(B) = ??$$

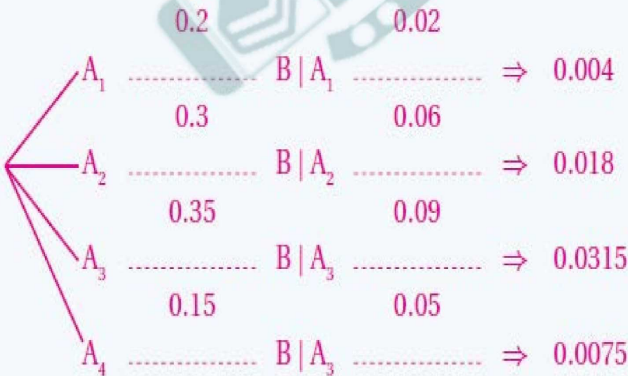
$$P(B) = \sum_{k=1}^4 P(A_k)P(B|A_k)$$

$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4)$$

$$= 0.2 \times 0.02 + 0.3 \times 0.06 + 0.35 \times 0.09 + 0.15 \times 0.05 = 0.061$$

$$\approx 6.1\%$$

عرض الحل بالرسم الشجري:



$$P(B) = 0.061$$

.a

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.002}{0.049} \approx 0.04$$

.b

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2) P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.012}{0.049} \approx 0.245$$

نستنتج أن الاحتمال الأكبر أن يكون المصباح التالف من إنتاج (a) من حل المثال (2):

$$P(B) = 0.049$$

$$P(A_3)P(B|A_3) = 0.035$$

$$P(B|A_3) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.035}{0.049} = 0.714 \approx 71.4\%$$

تحقق من فهمك 3

- بالرجوع إلى مثال (2) وبفرض أن المصباح الذي تم اختياره الثالث؟ قارن النتيجة التي توصلت إليها بالنتيجة في المثال
- قرر أي آلة سيكون احتمال إنتاجها للمصباح التالف الأكبر؟ وأي آلة سيكون احتمال إنتاجها للمصباح التالف الأقل؟

يمكن اتخاذ قرار: إنتاج المصباح التالف سوف يكون من إنتاج الآلة الثالثة لأنها هي الاحتمال الأكبر بين باقي الاحتمالات، كما نستطيع استنتاج أن إنتاج الآلة الأولى للمصابيح التالفة هو الأقل مقارنة بالآلتين الثانية والثالثة



التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

Discrete Probability Distribution

الدرس الثاني

في هذا
الدرس



- أتعرف التوزيعات الاحتمالية المنفصلة (توزيع ذي الحدين، توزيع بواسون)، وأوجدتها، وأفسرها لاتخاذ القرارات المناسبة.
- أحسب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين، وتوزيع بواسون.



« **فكر** سبق وأن درست مفهوم المتغير العشوائي، وأنواعه المتصلة والمنفصلة، وكيفية إيجادها وحساب قيمها من خلال تجربة عشوائية بسيطة. ولكن التجارب العشوائية في الواقع يصعب فيها إيجاد قيم المتغيرات العشوائية وحساب احتمالاتها، فكيف يمكن ذلك؟

يمكن ذلك من خلال التوزيعات الاحتمالية التي لها

تطبيقات متنوعة، منها على سبيل المثال في التعليم: حساب درجات الطلاب، وعدد الأسئلة، وتصنيف مستويات الأداء، والكشف عن الموهوبين، والتنبؤ بالتوجهات والميول العلمية للطلاب وغيرها.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (Probability Distribution for a Random Variable):

هو دالة توضح احتمالات قيم المتغير العشوائي المختلفة، ويعبر عنها بجدول أو معادلة رياضية تبين قيم المتغير العشوائي والاحتمالات المقابلة لها.

ويلاحظ أن المتغير العشوائي المنفصل يحتوي على عدد محدود من النتائج المحتملة للتجربة، أما المتغير العشوائي المتصل فيحتوي على عدد غير محدود من تلك النتائج.

التوزيع الاحتمالي المنفصل

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X الذي يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، ولكل X قيمة احتمالية معينة

يرمز لها بالرمز $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$

قراءة الرموز

■ يقرأ الرمز $P(X=1) = 0.05$ احتمال المتغير العشوائي X عندما تكون قيمته 1 يساوي 0.05.

فيقال إن للمتغير العشوائي المنفصل X توزيعاً احتمالياً منفصلاً $P(X = x_i)$ إذا حقق هذا التوزيع الشروط الآتية:

1. $P(X = x_i) \geq 0$ لجميع قيم X ($i = 1, 2, \dots, n$).
2. $\sum P(X = x_i) = 1$ (بمعنى أن مجموع الاحتمالات يساوي واحد).

لاحظ:

- يمكن رسم التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل باستخدام المدرج أو الأعمدة التكرارية.
- يمكن التعامل مع البيانات النوعية بوصفها متغيرات عشوائية منفصلة.
- لا يمكن أن تكون قيمة الاحتمال سالبة أو أكبر من 1.

مثال 1

تحقق من صحة شروط التوزيع الاحتمالي المنفصل فيما يأتي، وإذا تحققت شروط التوزيع فاستخدم التمثيل المناسب لعرض البيانات:

a.

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.25	0.15	0.30	0.30

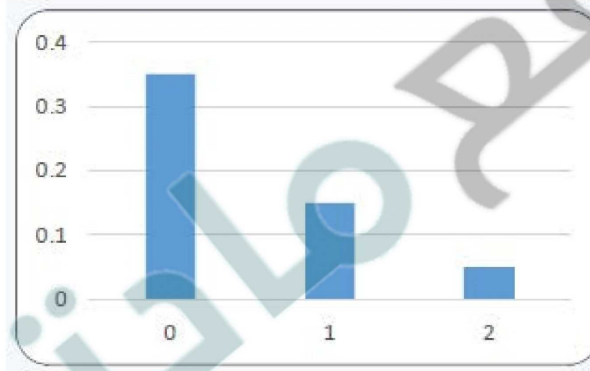
b.

X	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	-1

من أجل التحقق من أن هذا التوزيع الاحتمالي منفصل لابد من أن نتأكد من تحقق شرطين وهما: الشرط الأول: أن تكون جميع الاحتمالات أكبر من الصفر، والشرط الثاني: أن يكون مجموع جميع الاحتمالات يساوي واحد، وإذا تحقق الشرطان فإنه في هذه الحالة نستطيع القول بأن هذا التوزيع الاحتمالي توزيع منفصل بالنظر إلى البيانات الموجودة في الجدول نجد أن جميع قيم الاحتمالات في الصف الثاني من الجدول أكبر من الصفر؛ وهذا يعني أن الشرط الأول قد تحقق، لذا ننتقل للتأكد من تحقق الشرط الثاني وهو: أن مجموع الاحتمالات يساوي واحداً ويمكن التعبير عن هذا العبارة بالصيغة الرياضية الآتية

$$\begin{aligned}\sum P(X = x_i) &= 1 \\ \sum P(X = x_i) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= 0.35 + 0.15 + 0.05 = 0.55 < 1\end{aligned}$$

وحيث إن مجموع الاحتمالات يساوي 55% أي لا يساوي الواحد؛ فهذا يعني أن الشرط الثاني غير متحقق وعليه فإنه ليس توزيعاً احتمالياً منفصلاً. ويلاحظ أنه يمكن تمثيل التوزيع بيانياً، لأن التمثيل البياني لا يعني أنه يجب أن يكون توزيع احتمالي لتمثيله، ولكن يتم التعامل معه كبيانات يتم رسمها كما تعلمنا في الفصل الثاني من هذا الكتاب



هل التوزيع الاحتمالي الوارد في الجدول الآتي توزيع احتمالي منفصل؟ إذا كان كذلك مثله بيانياً.

X	0	1	2
P(X = x)	0.35	0.15	0.05

وبالإضافة إلى التعبير عن التوزيع الاحتمالي باستخدام الجدول؛ يمكن أيضاً التعبير عنه باستخدام معادلة، كما في توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون.

توزيع ذي الحدين (Binomial Distribution):

إذا كان لدينا تجربة ما تتكرر n مرة (بفرضتين نجاح وفشل)، وكان احتمال ظهور حدث ما (X) وليكن (النجاح) هو p ، واحتمال عدم ظهور هذا الحدث (الفشل) هو q ، فإن احتمال ظهور الحدث (X) من بين التكرارات n ، يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية (وتسمى بدالة الكتلة الاحتمالية) تعطى بالمعادلة الآتية:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} ; X = 0, 1, 2, \dots, n$$

من خصائص توزيع ذي الحدين:

- المتوسط الحسابي $\mu = np$ والتباين $\sigma^2 = npq$.
- $p + q = 1$.

لاحظ:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

$$n! = (n) (n-1) (n-2) \dots (1)$$

إذا كانت نسبة النجاح في تجربة 76% وكانت نسبة الفشل 21%، فهل تخضع هذه التجربة

للتوزيع الاحتمالي ذي الحدين؟ فسر إجابتك.

لا تخضع هذه التجربة لتوزيع ذي الحدين والذي يفترض خضوع التجربة لفرصتين متضادتين

وبحساب الاحتمال الكلي = 76 + 21 = 97 %

وهو ما يخالف الخاصية الثانية من خصائص توزيع ذي الحدين



تفكير ناقد

2

مثال



في تجربة رمي قطعة نقود معدنية 3 مرات، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات ظهور الصورة، فأوجد دالة توزيع ذي الحدين للتجربة، ثم احسب المتوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي X . واحسب احتمال ظهور صورتين.

الحل:

باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين:

$$P(X = i) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} ; X = 0, 1, 2, \dots, n$$

المتغير العشوائي X = عدد مرات ظهور الصورة $n = 3$, $q = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$

$$P(X = x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}; X = 0, 1, 2, 3$$

وعليه يكون المتوسط الحسابي:

$$\mu = np = 3 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

ويكون التباين:

$$\sigma^2 = npq = (3) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

ويكون احتمال ظهور صورتين ويعني $X=2$ ، يساوي:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = (3) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

لاحظ:

$$0! = 1$$

$${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)! 0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$${}_nC_n = 1$$

$${}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)! n!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$P(X = x_i) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; x = 0, 1, 2, \dots, n$$

المتغير العشوائي X = نسبة طلاب أحد المدارس الذين لا

يملكون سيارات. $P = 0.4$, $q = 0.6$, $n = 8$

$$P(X = x) = \binom{8}{x} (0.4)^x (0.6)^{8-x}; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

وعليه يكون المتوسط الحسابي:

$$\mu = np = 8(0.4) = 3.2$$

ويكون التباين:

$$\sigma^2 = npq = (8)(0.4)(0.6) = 1.92$$

ويكون احتمال ألا يمتلك 4 منهم سيارات ويعني $X = 4$

يساوي:

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \binom{8}{4} (0.4)^4 (0.6)^{8-4} = \\ &= \frac{8!}{4!(8-4)!} (0.4)^4 (0.6)^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{(4 \times 3 \times 2 \times 1)4!} (0.4)^4 (0.6)^4 \\ &= (7 \times 2 \times 5) (0.4)^4 (0.6)^4 \\ &= (70)(0.0256)(0.1296) \approx 0.232 \approx 23.2\% \end{aligned}$$

تحقق من فهمك 2

إذا كان 40% من طلاب إحدى المدارس لا يملك هذه المدرسة. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي والمتوسط الاحتمال لتوزيع ذي الحدين؛ وأوجد احتمال ألا يمتلك

لحل هذا السؤال لابد من إعادة تعريف توزيع ذي

الحدين وأنه يعتمد على فرصتين فقط وعدد من

المحاولات التي ترصد فيها مرات النجاح أو مرات

الفشل وعليه فإن نتائج المتغير في هذه التجربة تتبع

توزيع ذي الحدين باحتمالية يرمز لها P وعدد

محاولات يرمز له بـ n

ومن خلال المعلومات المعطاة في المثال فإن $P = 0.4$

و $n = 8$

وعليه يمكن القول بأن المتغير العشوائي يتبع توزيع

ذو الحدين باحتمالية 0.4 وعدد محاولات 8

باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين:

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; X = 0, 1, 2, \dots$$

حيث أن $e \approx 2.7$ مقدار ثابت، و λ هي المتوسط الحسابي لتوزيع بواسون.

ومن أهم خصائص توزيع بواسون أن المتوسط الحسابي = التباين = λ .

3

مثال

إذا كان المتوسط الحسابي لعدد الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب هو 3 أخطاء. فاحسب:

a. احتمال عدم حدوث أي خطأ.

b. احتمال حدوث خطأين.

الحل:

حيث إن المتوسط الحسابي للأخطاء المطبعية في إحدى صفحات الكتاب هو 3 أخطاء، فإن $\lambda = 3$.

ليكن X (الحدث): عدد الأخطاء المطبعية.

X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $0, 1, 2, \dots$ ويتبع توزيع بواسون الذي دالته الاحتمالية تعطى بالمعادلة

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!}; X = 0, 1, 2, \dots$$

a. احتمال عدم حدوث أي خطأ $X=0$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = 0.05$$

b. احتمال حدوث خطأين $X=2$

$$= \frac{e^{-3} 3^2}{2 \times 1} = 0.225$$

من المعلومات الموجودة في المثال (3) وهي كالآتي:

X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $0, 1, 2, \dots$ ، ويتبع

توزيع بواسون الذي دالته الاحتمالية تعطى بالمعادلة:

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!}; x = 0, 1, 2, \dots$$

احتمال عدم حدوث أي خطأ $X = 4$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-3} 3^4}{4!} = \frac{0.05 \times 81}{24} = \frac{4.05}{24} \approx 0.169 \approx 16.9\%$$

3

تحقق من فهمك

في مثال (3) السابق؛ احسب احتمال حدوث أربعة أخطاء.



التوزيعات الاحتمالية المتصلة

Continuous Probability Distribution

الدرس الثالث

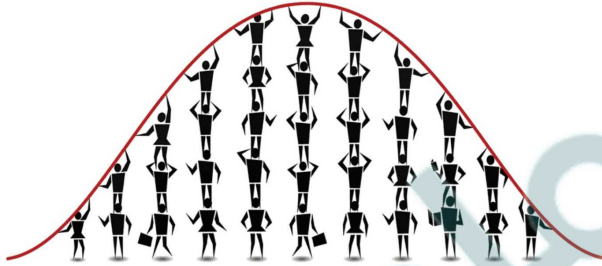
- أتعرف التوزيع الاحتمالي المتصل (التوزيع الطبيعي)، وأوجده، وأفسره لاتخاذ القرارات المناسبة.
- أحسب الاحتمالات باستخدام التوزيع الطبيعي.

في هذا
الدرس



- فكر هل يمكنك تطبيق توزيع احتمالي للمتغير العشوائي المتصل؛ كما هو الحال مع المتغير العشوائي المنفصل؟
- كيف يمكن أن تظهر القيم في الدالة الاحتمالية، وفي تمثيلها البياني؟

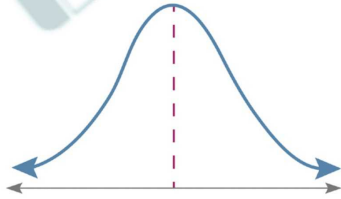
التوزيع الاحتمالي المتصل



هو أن يأخذ المتغير العشوائي المتصل X قيمة صحيحة وكسرية؛ أي أن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ويعطى التوزيع الاحتمالي المتصل بشكل صيغة رياضية تسمى دالة الكثافة الاحتمالية ويرمز لها بالرمز $f(x)$.

ويعد التوزيع الطبيعي أشهر وأهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وأكثرها استخداماً في أغلب الجوانب النظرية والتطبيقية، وله استخدامات متعددة لوصف النمط التكراري للعديد من الظواهر حولنا، مثل درجة الحرارة والطول والكتلة والدخل والأخطاء العشوائية الناتجة عند تحليل الانحدار.

والتوزيع الطبيعي توزيع احتمالي مستمر يتصف بالخصائص الآتية:



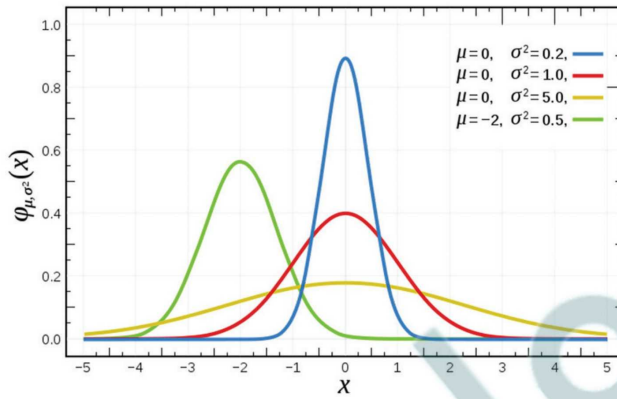
المتوسط = الوسيط = المنوال

1. يتخذ المنحنى شكل الجرس.
2. يكون المنحنى متماثلاً؛ حيث يقسمه المستقيم الرأسى المار بالوسط؛ إلى قسمين متساويين.
3. تكون المساحة تحت المنحنى (قيمة الاحتمال) تساوي 1.
4. تتساوى عند الخط المستقيم الرأسى المار بالوسط؛ قيمة المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
5. يقترب المنحنى من المحور الأفقى X ، ولكنه لا يمسه ولا يتقاطع معه.

التوزيع الطبيعي (Normal Distribution):

هو عبارة عن معادلة رياضية تحد المنحنى. وتعطى صيغة هذه المعادلة بالشكل الآتي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty ; -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$



حيث (μ) يمثل المتوسط الحسابي للتوزيع وهو قيمة X المناظرة للقيمة العظمى على المنحنى، أما (σ^2) يمثل التباين ومدى انتشار البيانات في التوزيع. ويوضح الشكل المجاور أثر المتوسط الحسابي والتباين على شكل منحنى التوزيع الطبيعي.

يمكن تسهيل حساب الاحتمال في التوزيع الطبيعي، من خلال تحويله إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام جداول خاصة.

التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution):

التوزيع الذي يكون متوسطه الحسابي صفر، وتباينه واحد.

نظرية:

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي μ وتباين σ^2 ، فإنه باستخدام صيغة التحويل: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ؛ يصبح التوزيع توزيعاً طبيعياً معيارياً.

الجدول المرفق 1 و 2 في الملحق هو الجدول المستخدم في حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري.



إثراء

تحويل التوزيع الاحتمالي إلى توزيع طبيعي

يمكن تحويل أي توزيع احتمالي إلى توزيع طبيعي من خلال معرفة الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع أو البيانات؛ بحيث يكون متوسط وتباين التوزيع الطبيعي هو نفس المتوسط والتباين للتوزيع.



باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أوجد كلاً من:

a. نسبة المساحة أقل من $Z = 1.56$ ($P(Z < 1.56)$)

b. نسبة المساحة أكبر من $Z = 1.20$ ($P(Z > 1.20)$)

c. نسبة المساحة المحصورة بين $Z = -0.8$ و $Z = 0.15$ ($P(-0.8 < Z < 0.15)$)

الحل:

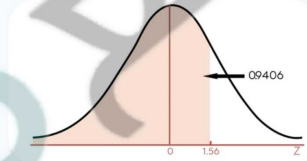
لاحظ:

جدول التوزيع الطبيعي يعطي فقط المساحة التي على يسار Z ، ولأن المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد؛ نطرح قيمة الاحتمال الجدولية من الواحد لنحصل على المساحة على يمين Z .

a. إيجاد قيمة الاحتمال $P(Z < 1.56)$ من الجدول المرفق 1 في

الملحق، عن طريق تقاطع الصف 1,5 مع العمود 0,06، فيكون:

$$P(Z < 1.56) = 0.9406$$



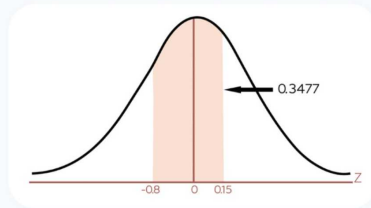
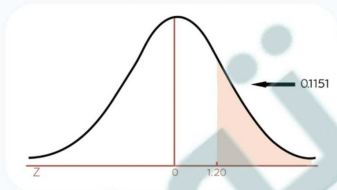
نسبة المساحة أقل من $Z = 1.56$ هي 94.06%

$$b. P(Z > 1.20) = 1 - P(Z \leq 1.20) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$

نسبة المساحة أكبر من $Z = 1.20$ هي 11.51%

c. حساب الاحتمال المحصورة بين $Z = -0.8$ و $Z = 0.15$

$$P(-0.8 < Z < 0.15) = P(Z < 0.15) - P(Z < -0.8) = 0.5596 - 0.2119 = 0.3477$$



نسبة المساحة المحصورة بين $Z = -0.8$ و $Z = 0.15$ هي 34.77%

تحقق من فهمك 1

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق في الملحق، أوجد كلاً من:

1. نسبة المساحة أقل من $Z = 1.17$. $P(Z < 1.17)$

2. نسبة المساحة أكبر من $Z = -0.50$. $P(Z > -0.50)$

من خلال البحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق رقم 1 مباشرة نجد أن:

$$P(Z < 1.17) = 0.8790 = 87.90\%$$

من خلال البحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق رقم 2 مع ملاحظة أن الجدول المرفق يعطي الاحتمالية التي على يسار قيمة Z (وهذا يعني نسبة المساحة الأقل من قيمة Z) لذلك نحتاج أن نطرح هذه القيمة من الواحد حيث إن نسبة المساحة كاملة تحت المنحنى تساوي 1، عليه نحتاج إلى تطبيق القاعدة

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z > -0.5) = 1 - P(Z < -0.5)$$

الآن سوف نبحث عن نسبة المساحة التي تقل عن -0.5

وذلك من خلال الجدول المرفق رقم (2) مباشرة.

$$P(Z < -0.5) = 0.3085 = 30.85\%$$

$$P(Z > -0.5) = 1 - 0.3085 = 0.6915$$

حل السؤال السادس والسابع من التقويم الختامي

6:

لا. وذلك لأن الاستفتاء احتوى على ثلاث نتائج، هي: القبول والرفض والامتناع عن التصويت، وهذا يتنافى مع تعريف توزيع ذي الحدين؛ حيث إنه يهتم بدراسة فرصتين فقط.

7:

بما أننا نعلم المتوسط فهذا يعني أنه يمكننا استخدام توزيع بواسون بمتوسط 3 ($\lambda = 3$).

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}; X = 0, 1, 2, 3$$

$$P(X = 0) \quad (a)$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3}(3)^0}{0!} \approx 0.051 \approx 5.1\%$$

$$P(X = 2) \quad (b)$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3}(3)^2}{2!} \approx 0.229 \approx 22.9\%$$

$$P(X \geq 2) \quad (c)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$= 1 - \left(\frac{e^{-3}(3)^0}{0!} + \frac{e^{-3}(3)^1}{1!} \right)$$

$$= 1 - (0.051 + 0.152)$$

$$= 1 - (0.203) \approx 0.797 \approx 79.7\%$$

من خلال البحث داخل جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق رقم (1)؛ (2) إذ لدينا في هذه المسألة قيمة الاحتمال، والمطلوب هو إيجاد قيمة Z التي تكون فيها نسبة المساحة أقل؛ وهذا أيضا يعد تطبيقاً مباشراً

ملاحظة مهمه للمعلم: فكرة لتقسيم الجدول لسرعة الحل (إذا كان الاحتمال أكبر من 50% نبحث مباشرة في المرفق (1) وهو الاتجاه الموجب لقيم Z أما إذا كانت الاحتمالية أقل من 50% فنبحث في الجدول بالاتجاه السالب لقيم Z)

$$P(Z < z) = 0.9357$$

وعليه فإن قيمة $z = 1.52$

تحقق من فهمك 2

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري أوجد

مثال 3

إذا كانت درجات 600 طالب في مقرر ما تتبع توزيع وكانت درجة النجاح هي 60، أوجد:

- النسبة المئوية للطلاب الذين تقع درجاتهم بـ
- عدد الطلاب الراسبين.

1. من معطيات المثال (3) نجد أن المتغير العشوائي يتبع

التوزيع الطبيعي بالمعلومات الآتية:

المتوسط الحسابي يساوي 72.

والانحراف المعياري 8.

وحجم العينة هو 600 طالباً.

بما أننا نريد عدد الطلاب الحاصلين على درجة 90 فأعلى

فإن نسبة (احتمال) الطلاب الذين حصلوا على درجة أكبر من 90:

$$P(X > 90) = P\left(Z > \frac{(90-72)}{8}\right) = P(Z > 2.25) \\ = 1 - P(Z < 2.25) = 1 - 0.9878 = 0.0122$$

إذن نسبة الطلاب الحاصلين على 90 درجة فأعلى في

المقرر يساوي تقريباً 1.22%، ولإيجاد عددهم نتبع الآتي:

$$0.0122 \times 600 = 7.32 \approx 7$$

وهذا يعني أن 7 طلاب تقريباً حصلوا على 90 فأعلى في

هذا المقرر.

بين 62، 78:

2. بما أننا نريد معرفة عدد الطلاب الناجحين في المقرر ونعلم أن أقل درجة للنجاح هي 60 فإن نسبة (احتمال) الطلاب الذين نجحوا في المقرر لابد ألا تقل درجاتهم عن 60:

$$P(X > 60) = P\left(Z > \frac{(60-72)}{8}\right) = P(Z > -1.50) = 1 - P(Z < -1.50) \\ = 1 - 0.0668 \\ = 0.9332$$

إذن نسبة الطلاب الناجحين في المقرر الذين تبلغ درجاتهم 60 درجة فأعلى

في المقرر يساوي تقريباً 93.32%، ولإيجاد عددهم نتبع الآتي:

$$0.9332 \times 600 = 559.92 \approx 560$$

وهذا يعني أن 560 طالباً تقريباً حصلوا على 60 فأعلى في هذا المقرر وهو ما

يمثل عدد الطلاب الناجحين في المقرر.

1. من المثال (3) كم عدد الطلاب الحاصلين على درجة 90 فأعلى في المقرر؟

2. كم عدد الطلاب الناجحين في المقرر؟

تجيب كتابة فضاء العينة كاملاً، والذي يقصد فيه جميع الاحتمالات التي من الممكن الحصول عليها.

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

(a) لنفرض A حادثة ظهور الكتابة مرتين وأن:

$$n(A) = 1, \quad A = \{TT\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

(b) لنفرض أن B حادثة الحصول على صورة في الرمية الأولى فهذا يعني أن:

$$n(B) = 2, \quad B = \{HH, HT\}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(c) لنفرض أن C حادثة الحصول على الكتابة في الرمية الثانية فهذا يعني أن:

$$n(C) = 2, \quad C = \{TT, HT\}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

:2

المعطيات:

$$P(A_1) = 0.7$$

$$P(A_2) = 0.3$$

$$P(B|A_1) = 0.95$$

$$P(B|A_2) = 0.97$$

لنفرض الآتي:

B الحادثة للعبوة السليمة.

 A_1 الحادثة للعبوة من إنتاج الدورة الأولى. A_2 الحادثة للعبوة من إنتاج الدورة الثانية.

المطلوب:

$$P(A_2|B) = ?$$

$$\begin{aligned} P(A_2|B) &= \frac{P(A_2)P(A_2|B)}{P(A_1)P(A_1|B) + P(A_2)P(A_2|B)} \\ &= \frac{(0.3)(0.97)}{(0.7)(0.95) + (0.3)(0.97)} \approx 0.3044 \approx 30.44\% \end{aligned}$$

:3

المعطيات:

$$n = 2$$

$$p = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$q = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0.7$$

المطلوب:

$$P(X = 1) = ?$$

من خلال المعطيات فإنه يمكن استخدام توزيع ذي الحدين.

$$P(X = 1) = \binom{2}{1} (0.3)^1 (0.7)^{2-1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} (0.3)(0.7) = 2(0.21) = 0.42$$

:4

بما أننا نعلم المتوسط فهذا يعني أنه يمكننا استخدام توزيع بواسون بمتوسط 5 ($\lambda = 5$) والمطلوب هو: $P(X = 3)$ ؟

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; \quad X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-5} (5)^3}{3!} \approx 0.145 \approx 14.5\%$$

:5

(a) المعطيات:

المتغير العشوائي X (أعلى درجة حرارة يومياً) يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 20^\circ\text{C}$ وانحراف معياري $\sigma = 5^\circ\text{C}$

$$\begin{aligned} P(22 < X < 26) &= P\left(\frac{22-20}{5} < \frac{X-20}{5} < \frac{26-20}{5}\right) = P(0.40 < Z < 1.20) \\ &= P(Z < 1.20) - P(Z < 0.40) = 0.8849 - 0.6554 = 0.2295 \approx 22.95\% \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X > 28) &= P\left(\frac{X-20}{5} > \frac{28-20}{5}\right) = P(Z > 1.60) = 1 - P(Z < 1.60) \\ &= 1 - 0.9452 \\ &= 0.0548 = 5.48\% \end{aligned}$$

A يعني: الإصابة بمرض السكري. $P(A) = 0.08$

B يعني: عدم الإصابة بمرض السكري. $P(B) = 0.92$

D يعني: أن الطبيب شُخص الإصابة بالمرض.

$$P(D|A) = 0.90, \quad P(D|B) = 0.02$$

المطلوب هو حساب

$$P(D|A) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)} = \frac{0.90 \times 0.08}{(0.90 \times 0.08) + (0.02 \times 0.92)} = \frac{0.072}{0.0904} = 0.796$$

:4

(a) المعطيات:

A_1 تعني: المريض حامل للفيروس من سلالات .a $P(A_1) = \frac{1}{2}$

A_2 تعني: المريض حامل للفيروس من سلالات .b $P(A_2) = \frac{1}{8}$

A_3 تعني: المريض حامل للفيروس من سلالات .c $P(A_3) = \frac{1}{8}$

A_4 تعني: المريض حامل للفيروس من سلالات .d $P(A_4) = \frac{1}{4}$

B تعني: الشفاء من المرض.

$$P(B|A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B|A_2) = \frac{1}{3}, \quad P(B|A_3) = \frac{1}{4}, \quad P(B|A_4) = \frac{1}{3}$$

ولحساب احتمال شفاء زيد من المرض

$$P(B) = \sum_{i=1}^4 P(A_i)P(B|A_i)$$

$$P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4) \\ P(B|A_i) = \\ 0.5 \times 0.5 + 0.125 \times 0.33 + 0.125 \times 0.25 + 0.25 \times 0.33 \\ = 0.405$$

(b)

$$P(A_3|B) = ??$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.125 \times 0.25}{0.405} = \frac{0.03125}{0.405} = 0.0772 \approx 7.72\%$$

:5

(a) المعطيات:

$$p = 0.8$$

$$n = 5$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي؛ والقول بأنه توزيع ذي الحدين.

$$P(X = x) = \binom{5}{x} (0.8)^x (0.2)^{5-x}; \quad X = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

(b)

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} (0.8)^3 (0.2)^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} (0.512)(0.04) = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!(2)!} (0.512) \\ (0.04) = 5 \times 2 \times (0.512) \times (0.04) = 10 \times (0.512) \times (0.04) = 0.2048 \approx 20.48\%$$

(c)

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} (0.8)^0 (0.2)^{5-0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} \times 1 \times (0.2)^5 = \frac{5!}{5!} \times 1 \times (0.00032) \\ = 1 \times 1 \times (0.00032) = 0.00032 \approx 0.032\%$$

:1

M يعني الطالب ذكر. $P(M) = \frac{2}{5} = 0.4$

F يعني الطالب أنثي. $P(M) = \frac{2}{5} = 0.4$

T يعني طول الطالب أكثر من 180 سم.

$$P(T|F) = \frac{1}{100} = 0.01, \quad P(T|M) = \frac{6}{100} = 0.06$$

المطلوب هو حساب $P(T|F)$.

باستخدام نظرية بييز:

$$P(T|F) = \frac{P(T|F)P(F)}{P(T|F)P(F) + P(T|M)P(M)} \\ = \frac{(0.01)(0.6)}{(0.01)(0.6) + (0.06)(0.4)} = \frac{0.006}{0.03} = 0.2 = \frac{1}{5}$$

:2

(a)

A يعني: المدخنون. $P(A) = \frac{1}{5} = 0.2$

B يعني: غير المدخنين. $P(B) = \frac{4}{5} = 0.8$

D يعني: المصابون بسرطان الرئة. $P(D) = 0.4$

نعلم أن نسبة الإصابة بسرطان الرئة بين المدخنين تساوي

$$4 \text{ أمثال النسبة بين غير المدخنين } P(D|A) = 4P(D|B)$$

نستطيع استخدام الخواص الجبرية البسيطة كما يأتي:

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) \\ 0.04 = 0.2P(D|A) + 0.8P(D|B)$$

$$P(D|B) = \frac{P(D|A)}{4} \text{ وحيث إن } P(D|A) = 4P(D|B) \text{ وهذا يعني أن}$$

$$0.04 = 0.2P(D|A) + 0.8 \frac{P(D|A)}{4} = 0.2P(D|A) + 0.2P(D|A) = 0.4P(D|A)$$

$$\therefore P(D|A) = \frac{0.04}{0.4} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1$$

وهذا يعني أن احتمال الإصابة بالسرطان بين المدخنين 0.1.

وعليه يمكن حساب احتمال الإصابة بالسرطان بين غير

المدخنين:

$$P(D|B) = \frac{P(D|A)}{4} = \frac{0.1}{4} = 0.025$$

وهذا يعني أن احتمال الإصابة بالسرطان بين غير المدخنين

0.025.

(b)

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)} = \frac{0.2 \times 0.1}{(0.2 \times 0.1) + (0.025 \times 0.8)} = \frac{0.02}{0.04} = 0.5$$

(a) المعطيات:

$$P = 0.40$$

$$n = 15$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع

الاحتمالي، والقول بأنه توزيع ذي الحدين.

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{15}{3} (0.4)^3 (0.6)^{15-3} \\ &= \frac{15!}{3!(15-3)!} \times 0.064 \times (0.6)^{12} \\ &= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{3 \times 2 \times 1 \times (12)!} \times 0.064 \times 0.0022 \\ &= 5 \times 7 \times 13 \times 0.064 \times 0.0022 \\ &= 0.0634 \approx 6.34\% \end{aligned}$$

(b)

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \left[\binom{15}{0} (0.4)^0 (0.6)^{15-0} + \binom{15}{1} (0.4)^1 (0.6)^{15-1} \right] = 1 - \\ &\quad \left[(0.6)^{15} + \frac{15 \times 14!}{1 \times (14)!} \times (0.4)^1 \times (0.6)^{14} \right] \\ &= 1 - [0.00047 + 15 \times 0.4 \times 0.00078] = 1 - \\ &\quad [0.00047 + 0.0047] = 1 - [0.0052] \\ &= 0.9948 \approx 99.48\% \end{aligned}$$

(c) المتوسط الحسابي np

$$np = 15 \times 0.4 = 6$$

:8

(a) المعطيات:

$$P = 0.60$$

$$n = 10$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع ذي الحدين.

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{10}{3} (0.6)^3 (0.4)^{10-3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} \times 0.216 \times (0.4)^7 \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times (7)!} \times 0.216 \times 0.00164 = 5 \times 3 \times 8 \times 0.216 \times 0.00164 \\ &= 0.0425 \approx 4.25\% \end{aligned}$$



$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= \binom{10}{2} (0.6)^2 (0.4)^{10-2} + \binom{10}{3} (0.6)^3 (0.4)^{10-3} + \binom{10}{4} (0.6)^4 (0.4)^{10-4} + \binom{10}{5} (0.6)^5 (0.4)^{10-5}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 1 \times (8)!} \times 0.36 \times 0.00066 + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times (7)!} \times 0.216 \times 0.00164$$

$$+ \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (6)!} \times 0.1296 \times 0.0041$$

$$+ \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (5)!} \times 0.0778 \times 0.0102$$

$$= 5 \times 9 \times 0.36 \times 0.00066 + 5 \times 3 \times 8 \times 0.216 \times 0.00164 + 10 \times 3 \times 7 \times 0.1296 \times 0.0041$$

$$+ 2 \times 3 \times 7 \times 6 \times 0.0778 \times 0.0102 = 0.011 + 0.0425 + 0.111 + 0.201 \approx 0.3652 \approx 36.52\%$$

(b)

(c)

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{10}{0} (0.6)^0 (0.4)^{10-0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} \times 1 \times (0.4)^{10} = \frac{10!}{10!} \times 1 \times (0.000105) \\ &= 1 \times 1 \times (0.000105) = 0.000105 \approx 0.0105\% \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \\ &= \binom{5}{2} (0.8)^2 (0.2)^{5-2} + \binom{5}{3} (0.8)^3 (0.2)^{5-3} + \binom{5}{4} (0.8)^4 (0.2)^{5-4} \\ &= \frac{5!}{2!(5-2)!} (0.64) (0.008) + \frac{5!}{3!(5-3)!} (0.512) (0.04) \\ &\quad + \frac{5!}{4!(5-4)!} (0.4096) (0.2) = 0.0512 + 0.2048 + 0.4096 \\ &= 0.6656 \approx 66.56\% \end{aligned}$$

(e) المتوسط الحسابي np

$$np = 5 \times 0.8 = 4$$

التباين npq

$$npq = 5 \times 0.8 \times 0.2 = 0.8$$

الانحراف المعياري $\sqrt{npq}$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{5 \times 0.8 \times 0.2} = \sqrt{0.8} = 0.8944$$

:6

(a) المعطيات:

$$P = 0.35$$

$$n = 20$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع ذي الحدين.

$$P(X = 3) = ??$$

$$P(X \leq 2) = ??$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{20}{3} (0.35)^3 (0.65)^{20-3} = \\ &= \frac{20!}{3!(20-3)!} \times 0.0429 \times (0.65)^{17} \\ &= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{3 \times 2 \times 1 \times (17)!} \times 0.0429 \times 0.00066 \\ &= 10 \times 19 \times 6 \times 0.0429 \times 0.00066 \end{aligned}$$

$$= 0.0323 \approx 3.23\%$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \binom{20}{0} (0.35)^0 (0.65)^{20-0} + \binom{20}{1} (0.35)^1 (0.65)^{20-1} + \binom{20}{2} (0.35)^2 (0.65)^{20-2}$$

$$= (0.65)^{20} + \frac{20!}{1!(20-1)!} \times 0.35 \times (0.65)^{19}$$

$$+ \frac{20!}{2!(20-2)!} \times 0.35^2 \times (0.65)^{18}$$

$$= 0.00018 + \frac{20 \times 19!}{1 \times (19)!} \times 0.35 \times 0.00028$$

$$+ \frac{20 \times 19 \times 18!}{2 \times 1 \times (18)!} \times 0.1225 \times 0.00043$$

$$= 0.00018 + 20 \times 0.35 \times 0.00028$$

$$+ 10 \times 19 \times 0.1225 \times 0.00043$$

$$= 0.00018 + 0.002 + 0.01 = 0.0121 \approx 1.21\%$$

$$P = 0.001$$

$$n = 25$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي؛ والقول بأنه توزيع ذي الحدين، ولكن نلاحظ أن قيمة الاحتمال صغيرة جداً؛ مما يجعل عملية حساب الاحتمالات أكثر صعوبة وعرضة للوقوع في الخطأ؛ لذلك نستطيع تحويل توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون عن طريق إجراء هذه التحويل.

$$\lambda = np = 0.001 \times 25 = 0.025$$

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-0.025}(0.025)^{x_i}}{x_i!}; X = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(X = 3) = ??$$

$$P(X \geq 1) = ??$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-0.025}(0.025)^3}{3!} = \frac{(0.975)(0.000016)}{3 \times 2 \times 1} = \frac{0.0000156}{6} \approx 0.0000026 \approx 0.00026\%$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-0.025}(0.025)^0}{0!} = 1 - e^{-0.025} \\ &= 1 - 0.975 \approx 0.025 \approx 2.5\% \end{aligned}$$

10:

(a) المعطيات:

$$\lambda = 3$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي؛ والقول بأنه توزيع بواسون؛ حيث إن البيانات كمية منفصلة ونتعامل مع متوسط حسابي؛ وهذا يقودنا للقول بأن التوزيع الاحتمالي هو توزيع بواسون:

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-3}(3)^{x_i}}{x_i!}; X = 0, 1, 2, \dots$$

$$251.0 = 3 \times 150.0 = (3) \times 3^3 \cdot e = \frac{3^4 \cdot e}{1!} = (1 = X)P$$

(b)

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= \frac{e^{-3}(3)^0}{0!} + \frac{e^{-3}(3)^1}{1!} + \frac{e^{-3}(3)^2}{2!} + \frac{e^{-3}(3)^3}{3!} + \frac{e^{-3}(3)^4}{4!}$$

$$= \frac{e^{-3}(3)^0}{0!} + \frac{e^{-3}(3)^1}{1!} + \frac{e^{-3}(3)^2}{2!} + \frac{e^{-3}(3)^3}{3!} + \frac{e^{-3}(3)^4}{4!}$$

$$= e^{-3} + e^{-3} \times (3) + \frac{e^{-3} \times (9)}{2} + \frac{e^{-3} \times (27)}{6} + \frac{e^{-3} \times (81)}{24}$$

$$= 0.051 + 0.152 + 0.230 + 0.230 + 0.172 \approx 0.835 \approx 83.50\%$$

11:

(a) المعطيات:

$$P = 0.001$$

$$n = 2000$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي؛ والقول بأنه توزيع ذي الحدين؛ ولكن نلاحظ أن قيمة الاحتمال صغيرة جداً وحجم العينة كبير جداً؛ مما يجعل عملية حساب الاحتمالات أكثر صعوبة وعرضة للوقوع في الخطأ؛ لذلك نستطيع تحويل توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون عن طريق عمل هذه التحويلة:

$$\lambda = np = 0.001 \times 2000 = 2$$

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-2}(2)^{x_i}}{x_i!}; X = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-2}(2)^3}{3!} = \frac{(0.137)(8)}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1.097}{6} \approx 0.183 \approx 18.3\%$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left[\frac{e^{-2}(2)^0}{0!} + \frac{e^{-2}(2)^1}{1!} \right] = 1 - [0.137 + 0.274]$$

$$= 1 - 0.411 \approx 0.589 \approx 58.9\%$$

$$P(D) = \sum_{j=1}^4 P(P_j)P(D|P_j)$$

$$= P(P_1)P(D|P_1) + P(P_2)P(D|P_2) + P(P_3)P(D|P_3) + P(P_4)P(D|P_4)$$

$$= 0.3 \times 0.01 + 0.2 \times 0.03 + 0.35 \times 0.02 + 0.15 \times 0.015 = 0.0183$$

$$P(P_1|D) = \frac{P(P_1)P(D|P_1)}{P(D)} = \frac{0.3 \times 0.01}{0.0183} = \frac{0.003}{0.0183} \approx 0.164 \approx 16.4\%$$

$$P(P_2|D) = \frac{P(P_2)P(D|P_2)}{P(D)} = \frac{0.2 \times 0.03}{0.0183} = \frac{0.006}{0.0183} \approx 0.329 \approx 32.9\%$$

$$P(P_3|D) = \frac{P(P_3)P(D|P_3)}{P(D)} = \frac{0.35 \times 0.02}{0.0183} = \frac{0.007}{0.0183} \approx 0.384 \approx 38.4\%$$

$$P(P_4|D) = \frac{P(P_4)P(D|P_4)}{P(D)} = \frac{0.15 \times 0.015}{0.0183} = \frac{0.00225}{0.0183} \approx 0.123 \approx 12.3\%$$

من خلال النتائج: نستنتج أن الخطوة الثالثة هي الأكثر احتمالاً أن تكون هي المستخدمة، لأنها ذات الاحتمال الأكبر مقارنة بالخطوات الثلاث الأخرى.

4

(a) المعطيات:

$$P = 0.75$$

$$n = 4$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع

الاحتمالي، والقول بأنه توزيع ذي الحدين.

$$P(X = x_i) = \binom{4}{x_i} (0.75)^{x_i} (0.25)^{4-x_i}, x_i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(b)

المتوسط الحسابي

$$np = 4 \times 0.75 = 3$$

التباين

$$npq = 4 \times 0.75 \times 0.25 = 0.75$$

الانحراف المعياري

$$\sqrt{npq} = \sqrt{4 \times 0.75 \times 0.25} = \sqrt{0.75} = 0.866$$

(c)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - \left[\binom{4}{0} (0.75)^0 (0.25)^{4-0} + \binom{4}{1} (0.75)^1 (0.25)^{4-1} \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{4!}{0!(4-0)!} \times 1 \times (0.25)^4 + \frac{4!}{1!(4-1)!} \times 0.75 \times (0.25)^3 \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{4!}{4!} \times 1 \times (0.0039) + \frac{4 \times 3!}{3!} \times 0.75 \times (0.0156) \right]$$

$$= 1 - [0.0039 + 0.0469]$$

$$= 1 - 0.051 \approx 0.949 = 94.9\%$$

5

(a) المعطيات:

$$P = 0.30$$

$$n = 4$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع

الاحتمالي، والقول بأنه توزيع ذي الحدين.

توزيع ذي الحدين:

$$P(X = x_i) = \binom{4}{x_i} (0.30)^{x_i} (0.70)^{4-x_i}, x_i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(b)

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} (0.30)^1 (0.70)^{4-1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \times 0.30 \times (0.70)^3$$

$$= \frac{4 \times 3!}{3!} \times 0.3 \times (0.343) = 4 \times 0.3 \times (0.343) \approx 0.412$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} (0.30)^3 (0.70)^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \times 0.027 \times (0.70)^1$$

$$= \frac{4 \times 3!}{3!} \times 0.027 \times (0.7) = 4 \times 0.027 \times (0.7) \approx 0.076$$

(c)

المتوسط الحسابي

$$np = 4 \times 0.3 = 1.2$$

التباين

$$npq = 4 \times 0.3 \times 0.7 = 0.84$$

(d) لحل هذه الفقرة من الجدول هناك طريقتان: الأولى كالآتي:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.076 + 0.2401 = 0.3161$$

أما الطريقة الثانية فهي كالآتي:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$= 1 - [0.0081 + 0.412 + 0.2646] = 1 - 0.6847 \approx 0.3153$$

$$P(A_1) = 0.20 \quad A_1 \text{ تعني الإنتاج من الماكينة A.}$$

$$P(A_2) = 0.4 \quad A_2 \text{ تعني الإنتاج من الماكينة B.}$$

$$P(A_3) = 0.50 \quad A_3 \text{ تعني الإنتاج من الماكينة C.}$$

B تعني الإنتاج المعيب.

$$P(B|A_1) = 0.02, P(B|A_2) = 0.03, P(B|A_3) = 0.04$$

$$= 0.04$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^3 P(A_k)P(B|A_k)$$

$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= 0.2 \times 0.02 + 0.3 \times 0.03 + 0.5 \times 0.04$$

$$= 0.033$$

(b)

$$P(A_2|B) = ??$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.30 \times 0.03}{0.033}$$

$$= \frac{0.009}{0.033} \approx 0.273 \approx 27.3\%$$

2

(a)

A_1 تعني المتقدم من حملة مؤهل الدبلوم.

$$P(A_1) = 0.35$$

A_2 تعني المتقدم من حملة مؤهل البكالوريوس.

$$P(A_1) = 0.55$$

A_3 تعني المتقدم من حملة مؤهل الماجستير.

$$P(A_1) = 0.10$$

B تعني المتقدم لديه خبرة سابقة.

$$P(B|A_1) = 0.08, P(B|A_2) = 0.09, P(B|A_3) = 0.02$$

$$(A|B)P(A)P \sum_{i=1}^3 = (B)P$$

$$(A|B)P(A)P + (A|B)P(A)P + (A|B)P(A)P =$$

$$= 0.35 \times 0.08 + 0.55 \times 0.09 + 0.10 \times 0.02$$

$$= 0.0795 \approx 7.95\%$$

(b)

$$P(A_2|B) = ??$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.55 \times 0.09}{0.0795} = \frac{0.0495}{0.0795} \approx 0.623 \approx 62.3\%$$



:7

(a) المعطيات:

$$P = 0.001$$

$$n = 10$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع ذي الحدين.

مناهج

المطلوب:

$$P(X = 0) = ??$$

$$P(X = 2) = ??$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (0.001)^0 (0.999)^{10-0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} \times 1 \times (0.999)^{10} \\ = 1 \times 1 \times 0.990 \approx 0.990$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2}$$

$$(0.001)^2 (0.999)^{10-2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0.000001 \times (0.999)^8 \\ = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 1 \times 8!} \times 0.000001 \times 0.992 \\ = 5 \times 9 \times 0.000001 \times 0.992 \approx 0.000045$$

:9

(a) المعطيات:

$$\lambda = 2$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع بواسون؛ حيث إن البيانات كمية منفصلة ونعامل مع متوسط حسابي، وهذا يقودنا للقول بأن التوزيع الاحتمالي توزيع بواسون.

معلومة مهمة في الحل: وهي أن التسهيلات في الميناء تستطيع خدمة ثلاث بواخر فقط في اليوم.

المطلوب:

احتمال أن تقوم إدارة الميناء في أحد الأيام بتحويل بواخر إلى الميناء الآخر. وهذا يعني أن عدد البواخر أكثر من ثلاث بواخر.

$$P(X > 3) = ??$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-2}(2)^0}{0!} + \frac{e^{-2}(2)^1}{1!} + \frac{e^{-2}(2)^2}{2!} + \frac{e^{-2}(2)^3}{3!} \right]$$

$$= 1 - [0.137 + 0.274 + 0.274 + 0.183] = 1 - 0.869 \approx 0.131 \approx 13.1\%$$

:10

(a) المعطيات:

$$\lambda = 3$$

ومن خلال هذه المعلومات نستطيع تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع بواسون؛ حيث إن البيانات كمية منفصلة ونعامل مع متوسط حسابي، وهذا يقودنا للقول بأن التوزيع الاحتمالي توزيع بواسون.

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3}(3)^0}{0!} = e^{-3} \approx 0.051 \approx 5.1\%$$

(a) المعطيات:

$$P = 0.80$$

$$n = 4$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع ذي الحدين.

توزيع ذي الحدين:

$$P(X = x_i) = \binom{4}{x_i} (0.8)^{x_i} (0.2)^{4-x_i}, x_i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(b)

المتوسط الحسابي

$$np = 4 \times 0.8 = 3.2$$

التباين

$$npq = 4 \times 0.8 \times 0.2 = 0.64$$

المتوسط الحسابي

$$\sqrt{npq} = \sqrt{4 \times 0.80 \times 0.20} = \sqrt{0.64} = 0.80$$

(c)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - [P(X = 0)]$$

$$= 1 - \left[\binom{4}{0} (0.8)^0 (0.2)^{4-0} \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{4!}{4!} \times 1 \times (0.0016) \right]$$

$$= 1 - 0.0016 \approx 0.9984$$

(d)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$= 1 - \left[\binom{4}{0} (0.8)^0 (0.2)^{4-0} + \binom{4}{1} (0.8)^1 (0.2)^{4-1} + \binom{4}{2} (0.8)^2 (0.2)^{4-2} \right]$$

$$= 1 - [1 \times 1 \times (0.0016) + 4 \times 0.8 \times 0.008$$

$$+ 6 \times 0.64 \times 0.04]$$

$$= 1 - [0.0016 + 0.0256 + 0.1536]$$

$$= 1 - 0.1808 \approx 0.8192$$

:8

(a) المعطيات:

$$n = 4$$

$$P = \frac{50}{500} = 0.10$$

$$q = 1 - \frac{50}{500} = \frac{450}{500} = 0.90$$

من خلال المعطيات فإنه يمكن استخدام توزيع ذي الحدين.

المطلوب:

$$P(X = 3) = ?$$

$$3) = \binom{4}{3} (0.1)^3 (0.9)^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} (0.001)(0.9) = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1!} \times 0.001 \times 0.9$$

$$= 4 \times 0.001 \times 0.9 = 0.0036 \approx 0.36\%$$

(b)

$$P(X = 4) = \frac{e^{-3}(3)^4}{4!} = \frac{(0.051) \times 81}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \approx 0.1715 \approx 17.15\%$$

:11

(a) المعطيات:

$$\lambda = 7$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع بواسون؛ حيث إن البيانات كمية منفصلة ونعامل مع متوسط حسابي، وهذا يقودنا للقول بأن التوزيع الاحتمالي توزيع بواسون.

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-7}(7)^{x_i}}{x_i!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

(b)

$$P(X = 4) = \frac{e^{-7}(7)^4}{4!} = \frac{(0.00096) \times 2401}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \approx 0.0956 \approx 9.56\%$$

(c)

$$P(X = 0) = \frac{e^{-7}(7)^0}{0!} = e^{-7} \approx 0.00096 \approx 0.096\%$$

(d) من المعلومات المهمة في توزيع بواسون أن المتوسط الحسابي والتباين متساويان، بما أن المتوسط الحسابي يساوي 7 فإن التباين أيضًا يساوي 7.

:12

(a) المعطيات:

$$\lambda = 3$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع بواسون؛ حيث إن البيانات كمية منفصلة ونعامل مع متوسط حسابي، وهذا يقودنا للقول بأن التوزيع الاحتمالي توزيع بواسون.

المطلوب:

$$P(X = 2) = ??$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3}(3)^2}{2!} = \frac{0.051 \times 9}{2} \approx 0.2286 \approx 22.86\%$$

:13

(a) المعطيات:

$$\mu = 100$$

$$\sigma = 8$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع طبيعي؛ حيث إن البيانات كمية متصلة وتم تحديد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، وهذا يقودنا للقول بأن التوزيع الاحتمالي توزيع طبيعي.

نلاحظ أنه لحل هذا التمرين نحتاج تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام قانون التحويل الآتي:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} P(X > 116) &= 1 - P(X < 116) = 1 - P\left(\frac{X - 100}{8} < \frac{116 - 100}{8}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{16}{8}\right) = 1 - P(Z < 2.00) \\ &= 1 - 0.9772 \approx 0.0228 \approx 2.28\% \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(90 < X < 120) &= P\left(\frac{90 - 100}{8} < \frac{X - 100}{8} < \frac{120 - 100}{8}\right) = P\left(-\frac{10}{8} < Z < \frac{20}{8}\right) \\ &= P(-1.25 < Z < 2.50) = P(Z < 2.50) - P(Z < -1.25) = 0.9938 - 0.1056 \\ &= 0.8882 \approx 88.82\% \end{aligned}$$

(a) المعطيات:

$$n = 120$$

$$\mu = 1.1$$

$$\sigma = 0.02$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع طبيعي؛ حيث إن البيانات كمية متصلة وتم تحديد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، وهذا يقودنا للقول بأن التوزيع الاحتمالي توزيع طبيعي.

نلاحظ أنه لحل هذا التمرين نحتاج تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام قانون التحويل الآتي:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

لإيجاد عدد العبوات التي يقل فيها حجم الماء عن 1.06 لتر من أصل 120 عبوة فإنه يجب أن نحسب احتمالية حجم العبوات التي تقل عن 1.06 لتر ومن ثم نوجد العدد.

$$\begin{aligned} P(X < 1.06) &= P\left(\frac{X - 1.1}{0.02} < \frac{1.06 - 1.1}{0.02}\right) = P\left(Z < \frac{-0.04}{0.02}\right) = P(Z < -2.00) \\ &= 0.0228 \approx 2.28\% \end{aligned}$$

عدد العبوات التي حجم الماء فيها يقل عن 1.06 لتر يتم حسابه عن طريق ضرب الاحتمالية في حجم العينة:

$$0.0228 \times 120 = 2.739 \approx 3$$

3 عبوات حجم الماء فيها يقل عن 1.06 لتر.

(b)

$$\begin{aligned} P(1.08 < X < 1.14) &= P\left(\frac{1.08 - 1.1}{0.02} < \frac{X - 1.1}{0.02} < \frac{1.14 - 1.1}{0.02}\right) = P\left(\frac{-0.02}{0.02} < Z < \frac{0.04}{0.02}\right) \\ &= P(-1.00 < Z < 2.00) = P(Z < 2.00) - P(Z < -1.00) = 0.9772 - 0.1587 \\ &= 0.8185 \approx 81.85\% \end{aligned}$$

تنشيط
انتقل إلى الإعداد

المعطيات:

$$\mu = 210$$

$$\sigma = 10$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع طبيعي؛ حيث إن البيانات كمية متصلة وجرى تحديد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، وهذا يقودنا لأن للقول بأن التوزيع الاحتمالي توزيع طبيعي.

نلاحظ أنه لحل هذا التمرين نحتاج تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام قانون التحويل الآتي:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

المطلوب:

$$P(184 < X < 233) = ??$$

$$\begin{aligned} P(184 < X < 233) &= P\left(\frac{184 - 210}{10} < \frac{X - 210}{10} < \frac{233 - 210}{10}\right) = P\left(\frac{-26}{10} < Z < \frac{23}{10}\right) \\ &= P(-2.60 < Z < 2.30) = P(Z < 2.30) - P(Z < -2.60) = 0.9893 - 0.0047 \\ &= 0.9846 \approx 98.46\% \end{aligned}$$

المعطيات:

$$\mu = 6000$$

$$\sigma = 1000$$

ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي، والقول بأنه توزيع طبيعي؛ حيث إن البيانات كمية متصلة وجرى تحديد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، وهذا يقودنا للقول بأن التوزيع الاحتمالي توزيع طبيعي.

نلاحظ أنه لحل هذا التمرين نحتاج تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام قانون التحويل الآتي:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} P(5700 < X < 6100) &= P\left(\frac{5700 - 6000}{1000} < \frac{X - 6000}{1000} < \frac{6100 - 6000}{1000}\right) \\ &= P\left(\frac{-300}{1000} < Z < \frac{100}{1000}\right) = P(-0.30 < Z < 0.10) = P(Z < 0.10) - P(Z < -0.30) \\ &= 0.5398 - 0.3821 = 0.1577 \approx 15.77\% \end{aligned}$$

Standard normal probabilities (continued)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

المرفق 2: جدول التوزيع الطبيعي المعياري لقيم Z السالبة.

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

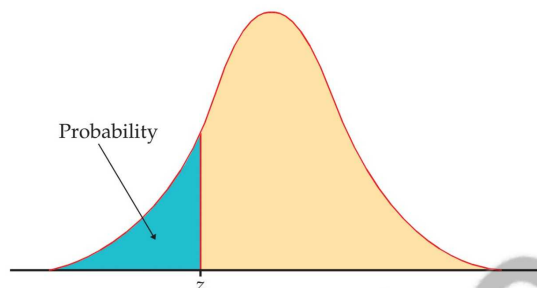


TABLE A

Standard normal probabilities

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641